Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Anfangsgründe

der

geometrischen Disciplinen

für

Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen,

sowie auch

zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

In drei Theilen.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Zweiter Theil:

Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1 8 5 9.

Elemente

der

ebenen und sphärischen Trigonometrie.

Für

Schulen und zum Selbstunterrichte bearbeitet

von

Dr. Joh. Müller,

Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

Mit 25 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1 8 5 9.

Die Herausgabe einer Uebersetzung in französischer und englischer Sprache, sowie in anderen modernen Sprachen wird vorbehalten.

Vorrede.

Ein gründliches Studium der Naturwissenschaften, namentlich aber der Physik, ist, wie wohl allgemein anerkannt wird, ohne mathematische Vorkenntnisse ganz unmöglich, und von mancher Seite her hört man deshalb auch den Mangel derselben bitter beklagen. Da nun aber doch die Mathematik fast auf allen höheren Schulanstalten Deutschlands einen wesentlichen Theil des Lectionsplanes bildet, so kann der verhältnißmäßig geringe Erfolg des mathematischen Unterrichtes kaum in etwas Anderem gesucht werden, als in der unzweckmäßigen Art, wie derselbe häufig ertheilt wird.

Der Vortrag der mathematischen Disciplinen wird nämlich vielfach allzu abstract gehalten, was die nachtheilige Folge hat, daß er nicht nur für die Naturwissenschaften vollkommen unfruchtbar bleibt, sondern daß er auch bei den Schülern eine meist schwer zu überwindende Abneigung gegen das mathematische Studium hervorruft.

Auffallender Weise treffen diese Vorwürfe vorzugsweise den geometrischen Unterricht, während Arithmetik und Algebra sich meist eines weit besseren Erfolges zu erfreuen haben.

Die mathematischen Vorkenntnisse, deren man für ein gedeihliches Studium der Physik bedarf, sind, wenn es sich nicht gerade um die schwierigsten Fragen handelt, weder sehr umfangreich noch schwer zugänglich. Es bedarf nur verhältnißmäßig weniger aber klar verstandener Sätze, welche durch genügende Uebung vollkommen geistiges Eigenthum geworden sind. Dadurch ist nun der Weg bezeichnet, welcher beim mathematischen Unterrichte befolgt werden muß, wenn er fruchtbringend für Wissenschaft und Leben werden soll. Es handelt sich darum, die für den logischen Zusammenhang, für das Fortschreiten in höheren mathematischen Disciplinen und für die practische Anwendung unentbehrlichen Wahrheiten möglichst klar und verständlich zu entwickeln und durch geeignete

Beispiele gut einzuüben. Nirgends wirkt eine Ueberladung an Material und ein Verlieren in Specialitäten nachtheiliger als beim mathematischen Unterrichte.

In diesem Sinne habe ich es versucht, die wichtigsten geometrischen Disciplinen zu bearbeiten, und zwar in drei Theilen, nämlich:

1. Die Elemente der ebenen Geometrie und Stereometrie;
2. Die Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie;
3. Die Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume;

welche zwar ein zusammengehöriges Ganzes bilden, von denen aber doch auch jeder einzelne Theil für sich bezogen werden kann.

Die beiden ersten Theile erscheinen gegenwärtig in zweiter Auflage. Die erste Auflage der ebenen Geometrie war im Jahre 1838, die erste Auflage der Trigonometrie war im Jahre 1839, freilich in etwas mangelhafter Ausstattung, zu Darmstadt erschienen. Die darin befolgte Methode hat sich bei dem geometrischen Unterrichte, welcher mir an der Realschule zu Gießen bis zu meiner Berufung nach Freiburg im Jahre 1844 übertragen war, vortrefflich bewährt, indem es mir namentlich gelang, den Schülern ein lebhaftes Interesse für den Gegenstand abzugewinnen und die erfreulichsten Fortschritte zu erzielen.

Es ist weder für ein weiteres Fortschreiten in der höheren Mathematik noch für praktische Anwendungen irgend einer Art genügend, daß man die geometrischen Wahrheiten einmal erkannt und verstanden hat; sie müssen durch erläuternde Beispiele, durch passende Uebungen zu einer lebendigen Anschauung erhoben werden, ohne welche eine freie Verwendung derselben für die Zwecke der Wissenschaft und des Lebens vollkommen unmöglich ist.

Während in dem vorliegenden Werkchen die Masse des Materials in dem oben angedeuteten Sinne auf das Nothwendigste beschränkt wurde, war ich bemüht, die vorgetragenen Lehren ausführlich genug zu entwickeln, um auch beim Selbstunterrichte zu einem vollkommen klaren Verständniß führen zu können, vorausgesetzt, daß der Leser alle Constructions- und Rechnungsbeispiele mit Sorgfalt und Genauigkeit ausführt.

Für eine lebendige Anschauung sind Constructionsaufgaben nach bestimmten Maaßen durchaus unentbehrlich, und deshalb habe ich sie auch in dem ganzen Werkchen von Anfang an durchgeführt. Nur durch solche Aufgaben wird es möglich, bei einem jeden Satze lange genug zu verweilen,

um ihn dem Gedächtniß gehörig einzuprägen und seine Bedeutung ins rechte Licht zu setzen. Gerade diese Constructionsaufgaben sind es auch, welche beim Unterrichte die rege Theilnahme des Schülers hervorrufen und dem Lehrer eine Controle darüber bieten, wie weit der Schüler in das Verständniß des fraglichen Satzes eingedrungen ist.

Beim Schulunterrichte müssen diese Aufgaben wenigstens theilweise nach einem größeren Maaßstabe auf der Tafel ausgeführt werden, wonach dann die übrigen dem häuslichen Fleiße überlassen bleiben können.

Ueber die einzelnen Theile bleiben nur noch wenige Bemerkungen zu machen übrig.

Ohne in Beziehung auf Tendenz und Methode etwas zu ändern, hat die zweite Auflage der Elemente der Geometrie namhafte Verbesserungen und eine wesentliche Ergänzung dadurch erfahren, daß die nothwendigsten Lehren der Stereometrie, welche in der ersten Auflage ganz fehlten, beigefügt wurden.

Ein besonderer Vorzug ist der neuen Auflage der Geometrie dadurch gesichert, daß die Figuren nicht allein ohne Vergleich besser und deutlicher, sondern auch weit zahlreicher sind, als in der ersten Auflage, was vorzugsweise daher rührt, daß ein großer Theil zum leichteren Verständniß wesentliche Figuren, welche in der ersten Auflage nur aus übergroßer Sparsamkeit weggeblieben waren, nun ihre Stelle gefunden haben.

Durch diese verbesserte Ausstattung, durch sorgfältige Ueberarbeitung des Textes und durch geeignete Ausfüllung mancher Lücken, welche bei der früheren Auflage lediglich dem mündlichen Unterrichte überlassen waren, hoffe ich das vorliegende Werkchen auch dem Selbstunterrichte zugänglich, so wie durch ein vollständiges Paragraphenregister und ein alphabetisches Inhaltsverzeichniß zur leichteren Orientirung und zum Nachschlagen geeigneter gemacht zu haben.

Zur Ausführung der Constructionsaufgaben ist ein Transporteur und ein Maaßstab nöthig. Um eine besondere Anschaffung derselben entbehrlich zu machen, sind den „Elementen der ebenen Geometrie" Abdrücke eines Transporteurs und einer Maaßstabstafel auf stärkerem Papier beigegeben worden.

Auch die Grundzüge der Trigonometrie erscheinen, wie schon bemerkt, in zweiter Auflage, zwar verbessert, aber ohne wesentliche Aenderung. Die trigonometrischen Functionen habe ich als Linien, als die Seiten rechtwinkeliger Dreiecke definirt, in welchen eine Seite der Längeneinheit gleich ist, weil diese Definition einfacher und anschaulicher ist als die

andere, nach welcher sie als Quotient zweier Dreiecksseiten bezeichnet werden. Die Linie ist ein geometrischer Begriff, der Quotient ist es nicht; deshalb glaubte ich die erstere Definition an die Spitze stellen, die letztere aber erst aus der Berechnung der Formeln rechtwinkeliger Dreiecke ableiten zu müssen.

Um dem Schüler nicht mit zwei Schwierigkeiten auf einmal entgegen zu treten, habe ich auch die Berechnung trigonometrischer Aufgaben im Anfang ohne Anwendung der Logarithmen durchgeführt und lasse die Benutzung der Logarithmen erst dann eintreten, wenn die Lehre von den trigonometrischen Functionen an und für sich klar und geläufig geworden ist. — Aus demselben Grunde habe ich auch die Formeln, welche zur Berechnung der fehlenden Stücke ebener und sphärischer Dreiecke dienen, erst vollständig aus der rein geometrischen Betrachtung entwickelt und erst später, ganz getrennt von dieser ersten Entwickelung, folgt die Umwandlung der Formeln, durch welche dieselben für logarithmische Rechnungen bequem gemacht werden.

Weil es im Anfang immerhin einige Schwierigkeiten hat, nach ebenen Figuren sich zu einer richtigen Anschauung räumlicher Verhältnisse zu erheben, habe ich der sphärischen Trigonometrie die Zeichnung der Netze beigefügt, aus welchen die den beiden Hauptfiguren dieser Abtheilung entsprechenden körperlichen Modelle leicht hergestellt werden können. Mit Hülfe dieser Modelle wird wohl das Verständniß der entsprechenden Entwickelungen keine Schwierigkeit mehr haben.

Der dritte Theil, die analytische Geometrie, erscheint zum ersten Male. Ich war bei Bearbeitung derselben bemüht, durch ausführlichere Besprechung concreter Fälle und durch Constructionsbeispiele nach gegebenen Zahlenwerthen die hier neu auftretenden Begriffe zugänglicher zu machen, als es gewöhnlich geschieht. Ich glaube namentlich auf diese Weise eine Brücke gebaut zu haben, welche den Leser über die Schwierigkeiten hinwegführt, die sich ihm meist beim Eintritt in das Studium der höheren geometrischen Disciplinen entgegenstellen.

Der analytischen Geometrie ist die Zeichnung des Netzes beigegeben, aus welchem man das körperliche Eck herstellen kann, welches durch die positiven Theile der drei Coordinatenebenen gebildet wird.

Freiburg, im Mai 1859.

J. Müller.

Inhaltsverzeichniß.

Erstes Buch.

Ebene Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Die trigonometrischen Linien und ihre wichtigsten Beziehungen.

Seite

1. Bestimmung von Sinus und Cosinus durch geometrische Construction . . . 3
2. Tafeln der Sinus und Cosinus 4
3. Interpolation 6
4. Die Summe der Quadrate von Sinus und Cosinus 8
5. Berechnung der Sinus und Cosinus von 30^0, 45^0 und 60^0 8
6. Berechnung der Katheten rechtwinkeliger Dreiecke 9
7. Berechnung der Hypotenuse 11
8. Berechnung der Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks 12
9. Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel 13
10. Sinus und Cosinus der Differenz zweier Winkel 14
11. Entwickelung weiterer Formeln 15
12. Construction der Tangente 16
13. Construction der Cotangente 17
14. Relation zwischen Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente 18
15. Tangente der Summe und der Differenz zweier Winkel 19
16. Anwendung der Tangente bei der Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke . . . 19
17. Die trigonometrischen Linien im Kreise 21
18. Secante, Cosecante und Sinus Versus 22
19. Die trigonometrischen Functionen stumpfer Winkel 23
20. Berechnung der Tafeln 26

Zweites Kapitel.

Anwendung der trigonometrischen Functionen zur Berechnung schiefwinkeliger Dreiecke.

21. Grundgleichungen des Dreiecks 30
22. Anwendung der Logarithmen 40
23. Beispiele 42

Zweites Buch.

Sphärische Trigonometrie.

		Seite
24.	Einleitung	49
25.	Entwickelung der Grundformeln	52
26.	Das Polardreieck	54
27.	Berechnung der fehlenden Stücke sphärischer Dreiecke	56
28.	Zusammenstellung der Formeln	66

Anhang.

Tafel der trigonometrischen Functionen des ersten Quadranten von zehn zu zehn Minuten 69

Erstes Buch.

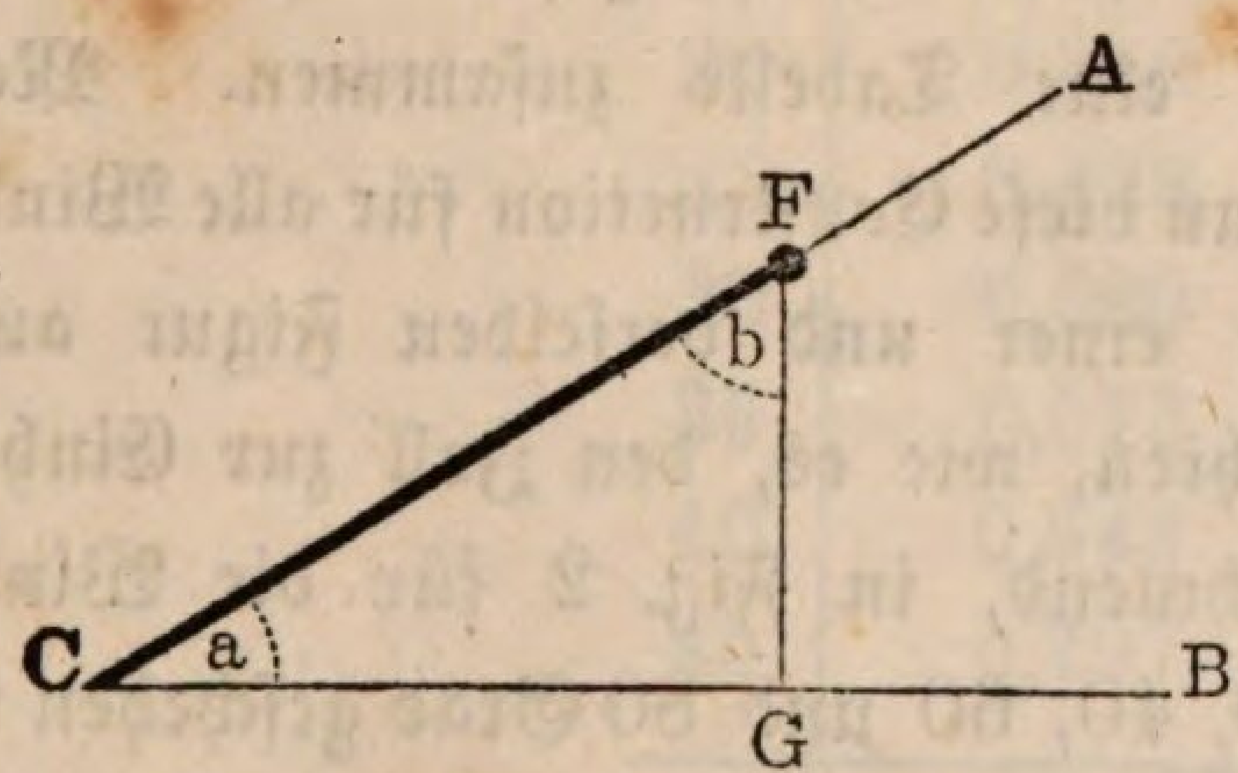
Ebene Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Die trigonometrischen Linien und ihre wichtigsten Beziehungen.

Bestimmung von Sinus und Cosinus durch geometrische Construction. Schneidet man auf dem einen Schenkel CA eines Winkels a, Fig. 1, ein Stück CF ab, welches der Längeneinheit gleich ist, so ist das von F auf den andern Schenkel CB des Winkels gefällte Perpendikel FG der Sinus des Winkels a. Die Entfernung des Scheitels C von dem Fußpunkt G dieses Perpendikels ist der Cosinus des Winkels a. Sollen Sinus und Cosinus eines Winkels durch Zahlen ausgedrückt werden, so muß man sie mit derselben Längeneinheit messen, welche man zur Construction des Sinus und Cosinus als Längeneinheit angenommen hatte. 1

Fig. 1.



Es sei z. B. *sin.* 35⁰ durch Construction zu bestimmen, so schneide man vom Scheitel an ein Stück CF ab, welches einem zehntheiligen (etwa badischen) Zoll gleich ist; das von F auf den andern Schenkel gefällte Perpendikel wird in diesem Falle 5,7‴ oder 0,57″ sein, es wäre demnach

$$sin.\ 35^0 = 0{,}57.$$

Bei der zu dieser Construction gewählten Einheit kann man den Sinus sowohl wie den Cosinus nur bis auf $^1/_{100}$ genau finden, weil man mit Hülfe des Zirkels und des tausendtheiligen Maaßstabes doch nur bis auf $^1/_{10}$ Linie, also bis auf $^1/_{100}$ der gewählten Längeneinheit genau messen kann.

Hätte man das Decimeter zur Längeneinheit gewählt, so hätte man bei gehöriger Sorgfalt den Sinus und Cosinus bis auf drei Decimalstellen genau finden können; es hätte sich ergeben

$$sin.\ 35^0 = 0{,}573$$

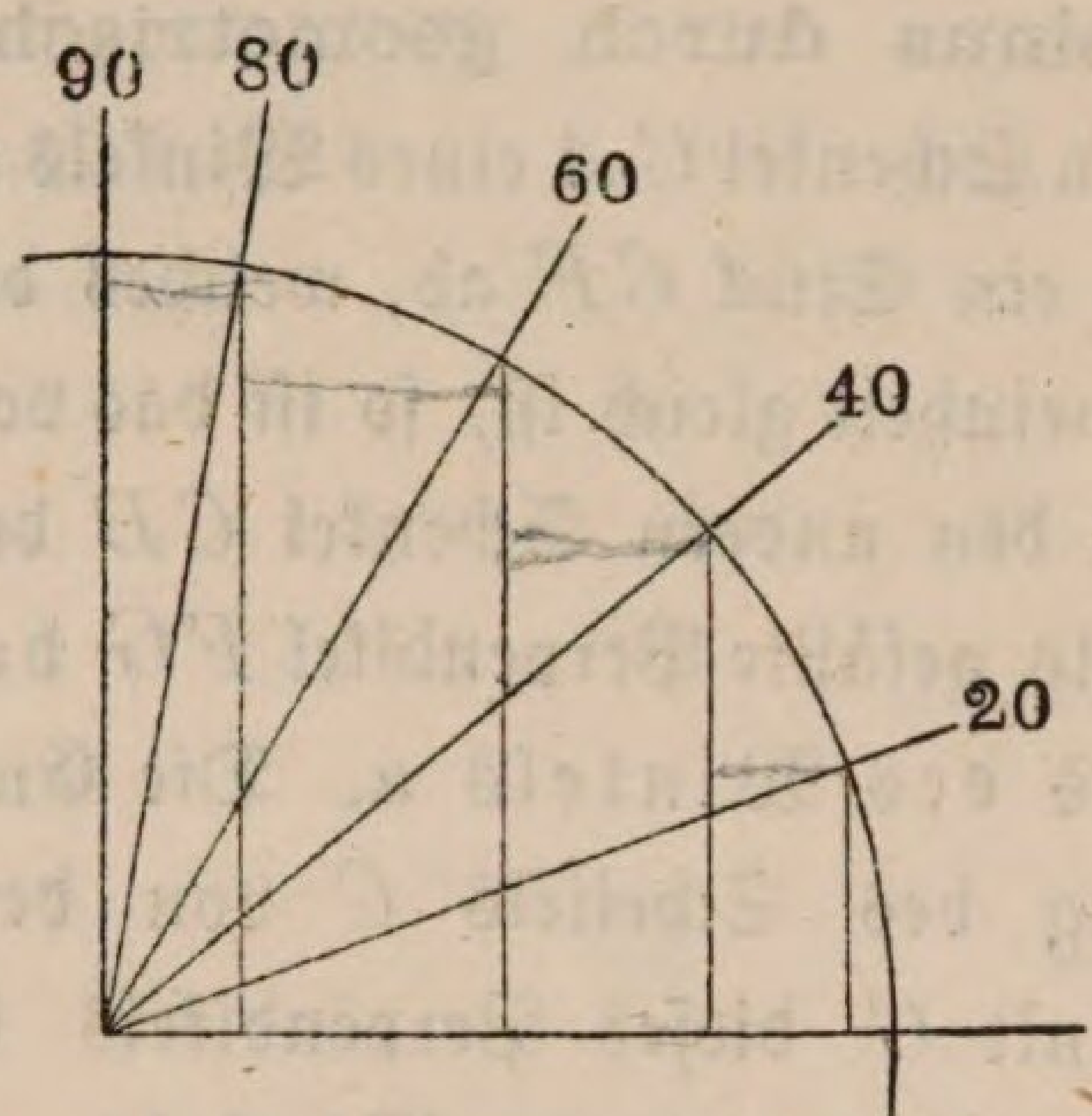
und

$$cos.\ 35^0 = 0{,}819.$$

Für die meisten Fälle reicht aber diese Genauigkeit nicht hin. Wir werden weiter unten Mittel kennen lernen, Sinus und Cosinus durch Rechnung ungleich genauer zu bestimmen, als es durch Zeichnung möglich ist.

Um den Begriff von Sinus und Cosinus besser einzuüben, construire man, das Decimeter zur Einheit nehmend, die Sinus und Cosinus von 5^0, 10^0, 15^0, 20^0 u. s. w. aller Winkel von 5 zu 5 Grad bis zu 90^0, und stelle die so gefundenen Werthe in eine Tabelle zusammen. Man kann diese Construction für alle Winkel an einer und derselben Figur ausführen, wie es, den Zoll zur Einheit nehmend, in Fig. 2 für die Winkel 20, 40, 60 und 80 Grad geschehen ist.

Fig. 2.



2 **Tafeln der Sinus und Cosinus.** Bezeichnen wir in Fig. 1 den Winkel CFG durch b, so ist, nach der obigen Definition von Sinus und Cosinus eines Winkels, CG der Sinus und FG der Cosinus des Winkels b. CG ist also zugleich der Sinus von b und der Cosinus von a, FG ist gleichzeitig der Sinus von a und der Cosinus von b, oder in Zeichen

$$sin.\, \text{a} = cos.\, \text{b}$$
$$cos.\, \text{a} = sin.\, \text{b}.$$

Der Winkel b ist aber offenbar $90^0 - \text{a}$, oder $R - \text{a}$, wenn durch R der rechte Winkel bezeichnet wird; es ist demnach

$$sin.\, \text{a} = cos.\ (R - \text{a})$$
$$cos.\, \text{a} = sin.\ (R - \text{a}).$$

So ist z. B. $sin.\ 15^0 = cos.\ 75^0$, $cos.\ 15^0 = sin.\ 75^0$; $sin.\ 40^0 = cos.\ 50^0$; $sin.\ 45^0 = cos.\ 45^0$ u. s. w.

Sind demnach die Sinus und Cosinus aller Winkel von 0^0 bis 45^0

bekannt, so kennt man dadurch zugleich auch die Sinus und Cosinus aller Winkel von 45^0 bis 90^0. Die Tafeln, in welchen man die numerischen Werthe von Sinus und Cosinus zusammengestellt hat, gehen deshalb auch nur bis zu 45^0. Ihre Einrichtung ist aus beistehender Tafel ersichtlich, welche die Sinus und Cosinus der Winkel von 5 zu 5 Grad enthält. Die erste Columne dieser kleinen Tafel enthält die Gradzahl der von 5^0 zu 5^0 fortschreitenden Winkel von 0^0 bis 45^0, die zweite die Sinus, die dritte die Cosinus der entsprechenden Winkel bis auf drei Decimalstellen:

	sin.	*cos.*	
0	0,000	1,000	90
5	0,087	0,996	85
10	0,174	0,985	80
15	0,259	0,966	75
20	0,342	0,940	70
25	0,423	0,906	65
30	0,500	0,866	60
35	0,573	0,819	55
40	0,643	0,766	50
45	0,707	0,707	45
	cos.	*sin.*	

über der zweiten steht deshalb *sin.*, über der dritten *cos.* Die vierte Columne enthält diejenige Gradzahl, welche die in gleicher Höhe in der ersten Columne stehende zu 90^0 ergänzt; diese letzte Columne enthält demnach von unten nach oben, von 5 zu 5 Grad wachsend, die Gradzahl der Winkel von 45 bis 90 Grad. In derselben Ordnung enthält die dritte Columne, unter welcher *sin.* steht, die Sinus der Winkel von 45^0 bis 90^0. Die Cosinus der Winkel von 45^0 bis 90^0 finden sich in der zweiten Columne, unter welcher *cos.* steht, und zwar ist jede Zahl dieser Columne der Cosinus des Winkels, welcher in derselben Horizontalreihe und in der letzten Columne steht.

Nach dieser Erklärung wird es leicht sein, in obiger Tafel *sin.* 40^0, *cos.* 15^0, *cos.* 65^0, *sin.* 80^0 u. s. w. aufzusuchen.

Große Tafeln haben eine ganz ähnliche Einrichtung, nur folgen die

Winkel von 10 Minuten zu 10 Minuten, oder von Minute zu Minute u. s. w. auf einander.

Bei größeren Rechnungen ist es sehr vortheilhaft, gleich den Logarithmen jedes Sinus und Cosinus aufschlagen zu können, deshalb hat man Tafeln entworfen, welche die Logarithmen der Sinus und Cosinus enthalten. Um den Anfänger aber nicht gleich mit doppelten Schwierigkeiten zu überhäufen, ist es besser, anfangs die logarithmische Rechnung noch zu vermeiden, und nur solche Tafeln anzuwenden, in denen man den Sinus und den Cosinus der Winkel selbst, und nicht ihre Logarithmen findet. Weil jedoch die am meisten verbreiteten Vega'schen Tafeln nur die Logarithmen der Sinus und Cosinus enthalten, so ist am Schlusse dieses Buches eine Tafel beigefügt, welche die Sinus und Cosinus der Winkel von 10′ zu 10′ enthält.

3 **Interpolation.** Man sieht aus den Tafeln sowohl als auch aus der Zeichnung, daß der Sinus mit dem Winkel von 0° bis 90° wächst, und zwar wächst der Sinus von 0 bis 1, während der Winkel von 0° bis 90° wächst. Der Wachsthum des Sinus ist aber nicht dem Wachsthum des Winkels proportional. Wenn ein kleiner Winkel um einen beliebigen Winkel s wächst, so ist der entsprechende Wachsthum des Sinus größer, als wenn ein größerer Winkel ebenfalls um s zunimmt. Wächst z. B. der Winkel von 5° um 10°, so ist der entsprechende Wachsthum des Sinus größer, als die Zunahme des Sinus, wenn man einen Winkel von 75° um 10° wachsen läßt; oder mit anderen Worten, obgleich die Differenz der Winkel 15° und 5° gleich ist der Differenz der Winkel 85° und 75°, so ist doch die Differenz $sin.\ 15° - sin.\ 5°$ größer als die Differenz $sin.\ 85° - sin.\ 75°$.

Beim Cosinus ist es umgekehrt. Der Cosinus von 0° ist 1, der Cosinus von 90° ist 0; während der Winkel von 0° bis 90° wächst, nimmt der Cosinus von 1 bis 0 ab; diese Abnahme ist aber nicht der Zunahme des Winkels proportional, sie ist für kleine Winkel am langsamsten; je größer die Winkel werden, desto rascher nehmen ihre Cosinus ab.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß streng genommen die Differenz zweier in den Tafeln auf einander folgender Sinus fortwährend um so mehr abnehmen müsse, je mehr man sich 90° nähert. Betrachtet man drei auf einander folgende Sinus der Tafeln, so müßte streng genommen die Differenz des letzten und des mittleren kleiner sein, als die Differenz des mittleren und des ersten. Der Unterschied zweier auf einander fol-

gender Sinusdifferenzen fällt aber meistens auf solche Decimalstellen, die nicht mehr berücksichtigt werden. So sind z. B. auf sechs Decimalstellen genau drei auf einander folgende Sinus unserer Tafel: *sin.* $7^0 = 0{,}121870$; *sin.* $7^0 10' = 0{,}124756$, *sin.* $7^0 20' = 0{,}127642$. Die Differenz des mittleren dieser drei Sinus und des vorhergehenden ist 0,002886; eben so groß ist aber auch die Differenz des mittleren und des letzteren. Hier finden wir also zwei auf einander folgende Differenzen gleich, obgleich sie es streng genommen nicht sein können. In der That hätte man die Sinus von 7^0, $7^0 10'$, $7^0 20'$ auf zehn Decimalstellen genau bestimmt, so würde man die fraglichen Differenzen nicht mehr gleich gefunden haben.

Daraus folgt nun, daß, wenn man nur sechs Decimalstellen berücksichtigt, ohne merklichen Fehler angenommen werden kann, daß innerhalb zweier um 10′ von einander verschiedener Winkelgränzen der Wachsthum des Sinus dem Wachsthum des Winkels proportional ist. Da *sin.* 7^0 um 0,002886 wächst, wenn der Winkel um 10′ zunimmt, so wird er um $0{,}002886 \times {}^1/_{10}$, oder um 0,0002886 zunehmen, wenn der Winkel von 7^0 um 1′ zunimmt. Demnach ist

$$sin.\ 7^0 1' = 0{,}121870 + 0{,}0002886 = 0{,}1221586.$$

Ferner ist *sin.* $7^0 2' = 0{,}121870 + 0{,}002886 \times {}^2/_{10}$ u. s. w.

Nach diesem Princip kann man den Sinus eines jeden Winkels bestimmen, welcher zwischen zwei auf einander folgenden Winkeln der Tafel liegt. Ein solches Verfahren, Zwischenwerthe zu berechnen, heißt **Interpolation**.

Durch eine ganz ähnliche Interpolation kann man auch den Cosinus solcher Winkel finden, die zwischen zwei auf einander folgenden Winkeln der Tafel liegen, nur darf dabei nicht übersehen werden, daß der Cosinus abnimmt, wenn der Winkel wächst.

Umgekehrt kann man auch durch Interpolation den Winkel bestimmen, der zu einem Sinus oder Cosinus gehört, der nicht unmittelbar in den Tafeln steht, sondern zwischen zwei auf einander folgenden Sinus oder Cosinus der Tafel liegt. Es sei z. B. der Winkel zu suchen, dessen Sinus 0,866324 ist. Der nächst kleinere Tafelsinus ist 0,866025 und dieser gehört einem Winkel von 60^0 an. Der nächst größere Tafelsinus ist *sin.* $60^0\ 10' = 0{,}867476$; also die Differenz des nächst kleineren und des nächst größeren Sinus der Tafel ist 0,001451; unser Sinus ist aber nur um 0,000299 größer als der Sinus von 60^0, also ist der

fragliche Winkel um eine Anzahl n Minuten größer als 60°, die sich zu 10 verhält wie 0,000299 zu 0,001451, also

$$n : 10 = 299 : 1451,$$

woraus folgt $n = 2'$, ... Der Winkel also, welcher zu dem Sinus 0,866324 gehört, ist 60° 2′. Zur bequemeren Interpolation findet man häufig in den Tafeln die Differenzen der auf einander folgenden Sinus und Cosinus in einer besonderen Columne beigefügt, so daß man nicht erst nöthig hat, die Differenzen durch Subtraction zu suchen.

Es wird gut sein, wenn der Schüler nicht eher weiter geht, als bis er mit Leichtigkeit zu jedem beliebigen Winkel den Sinus und Cosinus, und zu jedem gegebenen Sinus oder Cosinus den Winkel mittelst der Tafeln durch Interpolation suchen kann.

4 **Die Summe der Quadrate von Sinus und Cosinus.** Sinus und Cosinus eines spitzen Winkels bilden die beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich 1 ist; daraus folgt

$$(sin.\,a)^2 + (cos.\,a)^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und also

$$(sin.\,a)^2 = 1 - (cos.\,a)^2$$

$$sin.\,a = \sqrt{1 - (cos.\,a)^2}$$

und ebenso

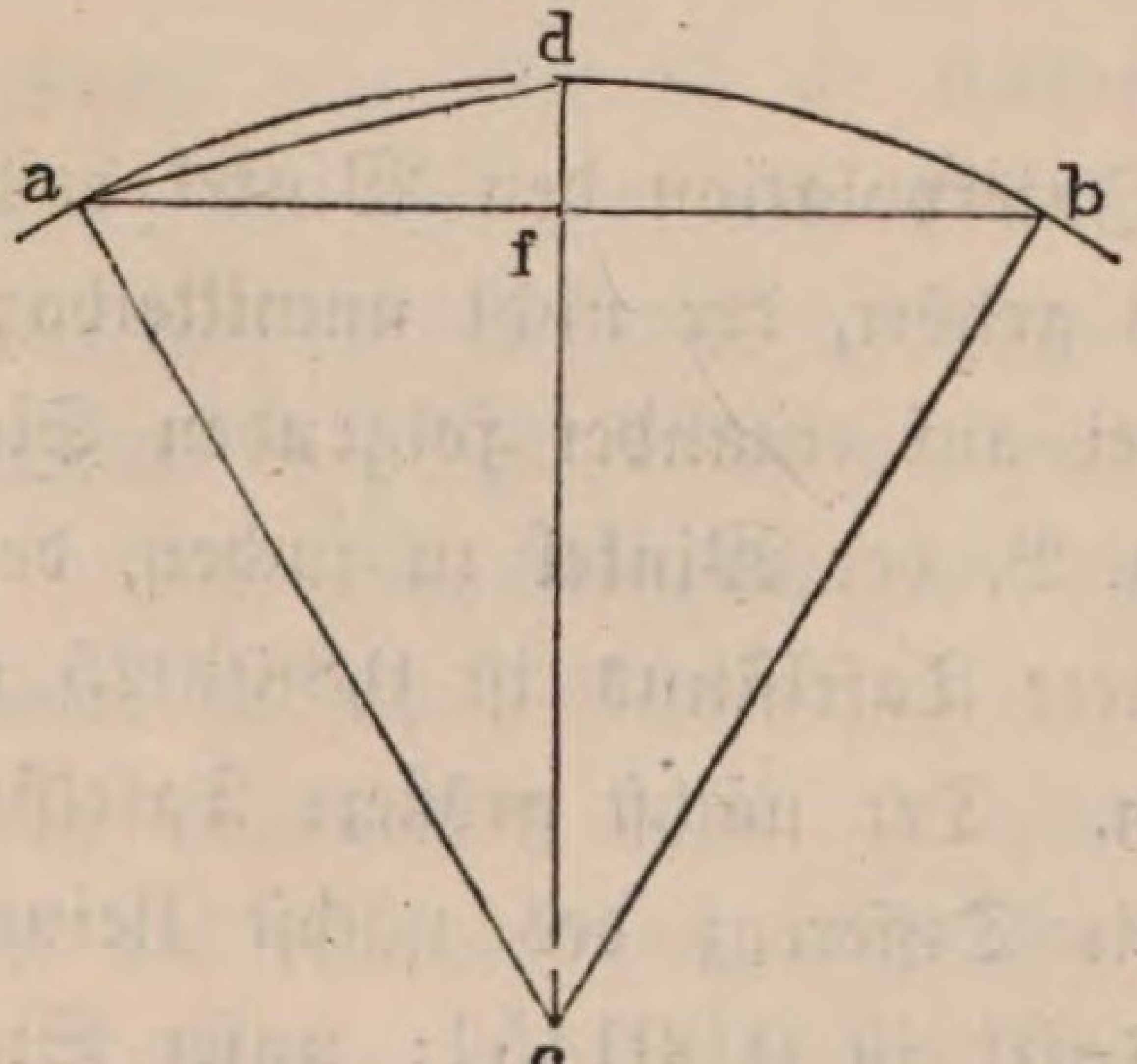
$$(cos.\,a)^2 = 1 - (sin.\,a)^2$$

$$cos.\,a = \sqrt{1 - (sin.\,a)^2}.$$

Ist demnach der Sinus eines Winkels bekannt, so kann man seinen Cosinus, und ist der Cosinus bekannt, seinen Sinus berechnen.

5 **Berechnung der Sinus und Cosinus von 30°, 45° und 60°.** In Fig. 3 sei $\measuredangle acb = 60°$, also ab die Seite eines regelmäßigen Sechsecks. In dem rechtwinkeligen Dreieck acf ist offenbar $\measuredangle acf = 30°$, und wenn $ac = 1$, so ist $af = sin.\,30°$. Wenn aber $ac = 1$, so ist auch $ab = 1$, und $af = 0,5$; es ist also

Fig. 3.



$$sin.\,30° = 0,5$$

und

$$cos.\,30° = \sqrt{1 - 0,25} = \sqrt{0,75}$$
$$= 0,866025.$$

Nun aber ist $sin.\,30° = cos.\,60°$ und $cos.\,30° = sin.\,60°$, mithin hat man

$$sin.\ 60^0 = 0{,}866025$$
$$cos.\ 60^0 = 0{,}5.$$

Der Sinus und der Cosinus eines Winkels von 45^0 sind einander gleich, denn wie wir oben gesehen haben, ist $sin.\ 45^0 = cos.\ (90^0 - 45^0) = cos.\ 45^0$. Nun aber ist

$$(sin.\ 45^0)^2 + (cos.\ 45^0)^2 = 1$$

folglich auch

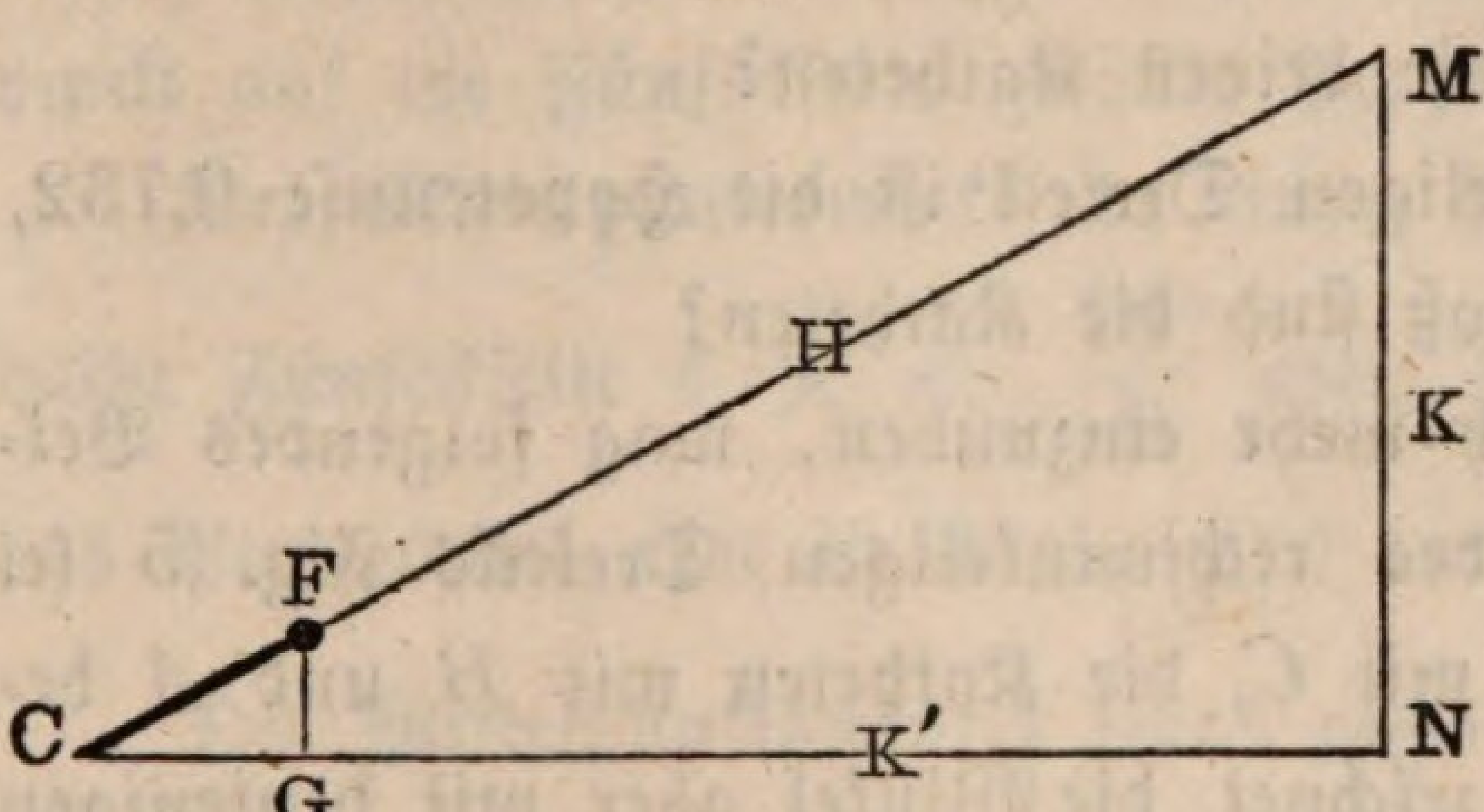
$$(sin.\ 45^0)^2 + (sin.\ 45^0)^2 = 1$$

oder

$$2\ (sin.\ 45^0)^2 = 1;\ (sin.\ 45^0)^2 = \tfrac{1}{2} = 0{,}5$$
$$sin.\ 45^0 = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707107.$$

Berechnung der Katheten rechtwinkeliger Dreiecke. Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse und die Winkel bekannt 6

Fig. 4.



sind, so kann man mit Hülfe der Sinus und Cosinus der gegebenen Winkel die beiden Katheten berechnen. In dem rechtwinkeligen Dreieck Fig. 4 sei die Hypotenuse CM mit H, die eine Kathete MN mit K, die andere CN mit K' und der der Seite K gegenüberliegende Winkel MCN mit a bezeichnet. Denkt man sich auf der Hypotenuse H einen Punkt F bezeichnet, welcher von der Spitze des Winkels a um die Längeneinheit entfernt ist, so ist das von F auf K' gefällte Perpendikel FG der Sinus und CG der Cosinus des Winkels a. Nach der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke ist demnach

$$1 : sin.\,a = H : K.$$

Aus dieser Gleichung zieht man

$$K = H\ sin.\,a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

oder in Worten: man erhält eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man die Hypotenuse mit dem Sinus des Winkels multiplicirt, welcher der gesuchten Seite gegenüberliegt.

Für $H = 10000$, $a = 30^0$, ist $K = 10000\,.\,sin.\ 30^0 = 10000\,.\,0{,}5 = 5000$.

Wenn $H = 524$, $a = 64^0$, so ist

$$K = 524\,.\,sin.\ 64^0 = 524\,.\,0{,}898794.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, Fig. 4, folgt aber auch

$$1 : cos.\,a = H : K'$$

also

$$K' = H\ cos.\,a \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

d. h. in Worten: man findet eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man die Hypotenuse mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen die gesuchte Kathete mit der Hypotenuse bildet.

Wenn in Fig. 4 $H = 632$, $a = 27^0$, so ist $K' = 632 . cos.\,27^0 = 632 . 0{,}891007$.

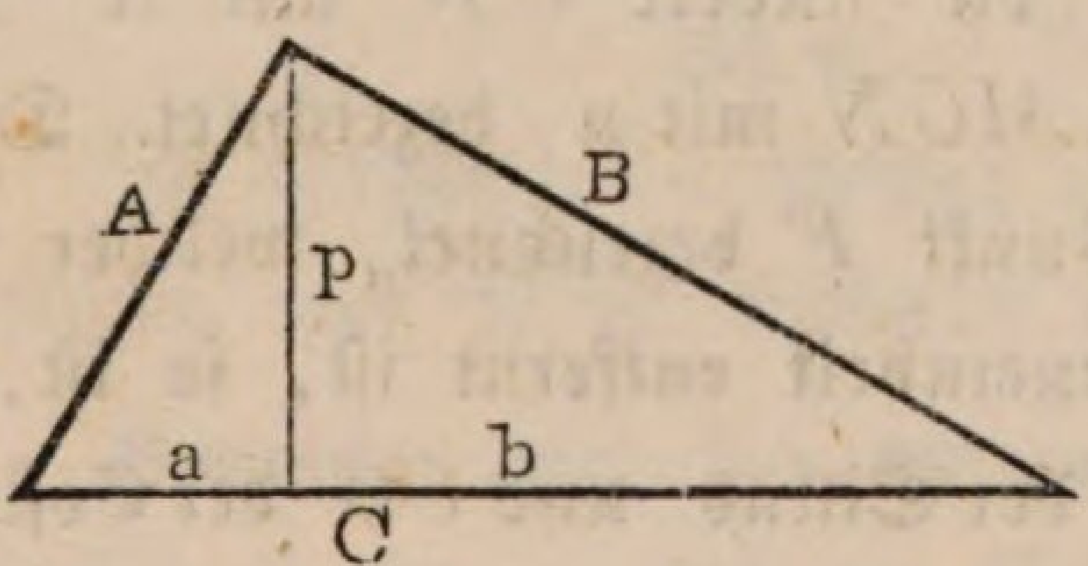
Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse 628′ und einer der beiden spitzen Winkel 19° ist, so ist diejenige Kathete dieses Dreiecks, welche dem Winkel von 19° gegenüberliegt, 628 *sin.* 19°, die andere Kathete ist 628 *cos.* 19°.

In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Hypotenuse 6834′, der eine Winkel 23° 35′; wie groß sind die beiden Katheten?

In einem andern rechtwinkeligen Dreieck ist die Hypotenuse 0,732, der eine Winkel 78° 15′; wie groß sind die Katheten?

Um das bisher Gesagte noch mehr einzuüben, mag folgendes Beispiel dienen. Die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks Fig. 5 sei mit C, die Katheten mit B und A bezeichnet, die Winkel aber mit denjenigen griechischen Buchstaben, welche den Buchstaben der gegenüberliegenden Seiten entsprechen, so hat man

Fig. 5.



$$B = C\ sin.\,\beta$$
$$A = C\ cos.\,\beta.$$

Fällt man von der Spitze des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuse, so ist dieses offenbar

$$v = A\ sin.\,\beta.$$

Setzt man den für A gefundenen Werth in diese Gleichung, so kommt

$$p = C\ cos.\,\beta\ sin.\,\beta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (I)$$

Es ist aber auch

$$p = B\ sin.\,\alpha.$$

Substituirt man hier den oben für B gefundenen Werth, so kommt

$$p = C\ sin.\,\beta\ sin.\,\alpha \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (II)$$

Dieser Werth ist aber offenbar mit dem bei (I) identisch, denn $sin.\,\alpha = cos.\,\beta$, weil die Winkel β und α sich zu 90° ergänzen.

Durch das Perpendikel wird die Hypotenuse in zwei Theile a und b getheilt, und es ist:

$$b = B\ cos.\,\alpha = B\ sin.\,\beta$$

substituirt man für B seinen obigen Werth, so kommt:

$$b = C\ (sin.\,\beta)^2$$

ferner ist

$$a = A\ cos.\,\beta$$

und wenn man für A seinen obigen Werth setzt

$$a = C\ (cos.\,\beta)^2.$$

Es sei in obigem Dreieck $C = 839$, der Winkel $\beta = 34^0$; wie groß ist B, A, p, a und b? Wie groß sind diese Stücke, wenn $C = 1$ und $\beta = 67^0$ ist?

Der Radius eines Kreises sei 4^{cm}, wie groß ist die Seite eines in diesen Kreis beschriebenen Fünfecks? Wie groß ist das aus dem Mittelpunkt auf die Fünfeckseite gefällte Perpendikel?

Der Mittelpunktswinkel in einem Fünfeck ist 72^0, und demnach die halbe Fünfeckseite $4 \times sin.\,\frac{72^0}{2}$ oder $4\ sin.\ 36^0 = 4 \times 0{,}587785$, das Perpendikel aber ist $4\ cos.\ 36^0 = 4\,.\,0{,}809017$.

Der Mittelpunktswinkel eines regelmäßigen nEcks ist $\frac{360^0}{n}$; daraus ergiebt sich die halbe Seite eines regelmäßigen nEcks, welches in einen Kreis vom Radius r beschrieben ist: $r\,.\,sin.\,\frac{360^0}{2n}$; das auf eine Seite des nEcks gefällte Perpendikel ist aber $r\,.\,cos.\,\frac{360^0}{2n}$.

Berechnung der Hypotenuse. Wir haben oben Gleichung (2) 7
gesehen, daß $K = H\ sin.\,a$, daraus folgt aber

$$H = \frac{K}{sin.\,a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

das heißt in Worten: man findet die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man die eine Kathete durch den Sinus des Winkels dividirt, welcher ihr gegenüberliegt.

Es sei z. B. die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks 324, der ihr gegenüberliegende Winkel 62^0; wie groß ist die Hypotenuse?

Wir haben aber oben, Gleichung (3), auch gefunden, daß

$$K' = H\ cos.\,a$$

daraus folgt

$$H = \frac{K'}{cos.\, a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

d. h. in Worten: man findet die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man eine Kathete durch den Cosinus des Winkels dividirt, welchen diese Kathete mit der Hypotenuse einschließt.

Es sei z. B. die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks 27′, der Winkel, den sie mit der Hypotenuse bildet, sei 38°; wie groß ist die Hypotenuse?

Faßt man die beiden eben gegebenen Regeln zusammen, so kann man sie so ausdrücken: Man findet die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man eine Kathete mit dem Sinus des gegenüberliegenden, oder mit dem Cosinus des anliegenden Winkels dividirt. Natürlich findet man jedesmal dasselbe Resultat, weil ja der Sinus des gegenüberstehenden Winkels dem Cosinus des anliegenden gleich ist (§. 2).

8 **Berechnung der Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks.**

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt auch

$$sin.\, a = \frac{K}{H} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

und

$$cos.\, a = \frac{K'}{H} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

das heißt in Worten: wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die drei Seiten bekannt sind, so findet man den Sinus eines der spitzen Winkel, wenn man mit der Hypotenuse in die Kathete dividirt, welche dem fraglichen Winkel gegenüberliegt; den Cosinus eines der beiden spitzen Winkel findet man aber, wenn man mit der Hypotenuse in die anliegende Kathete dividirt.

Es seien z. B. die beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks 3 und 4, so ist bekanntlich die Hypotenuse 5. Der Sinus des Winkels a, welcher der Kathete 3 gegenüberliegt, ist $^3/_5$; der Cosinus dieses Winkels ist $^4/_5$. Es ist aber $^4/_5$ zugleich der Sinus des Winkels b, welcher der Seite 4 gegenüberliegt, und $^3/_5$ der Cosinus dieses Winkels.

Da nun der Sinus und Cosinus der beiden spitzen Winkel bekannt sind, so findet man leicht die entsprechenden Winkel selbst mit Hülfe der Tafeln. Es ist

$$sin.\, a = {}^3/_5 = 0{,}6.$$

Der nächst kleinere Sinus, welcher sich in den hinten angehängten Tafeln findet, ist 0,599489 und dieser gehört einem Winkel von $36^0 50'$ an.

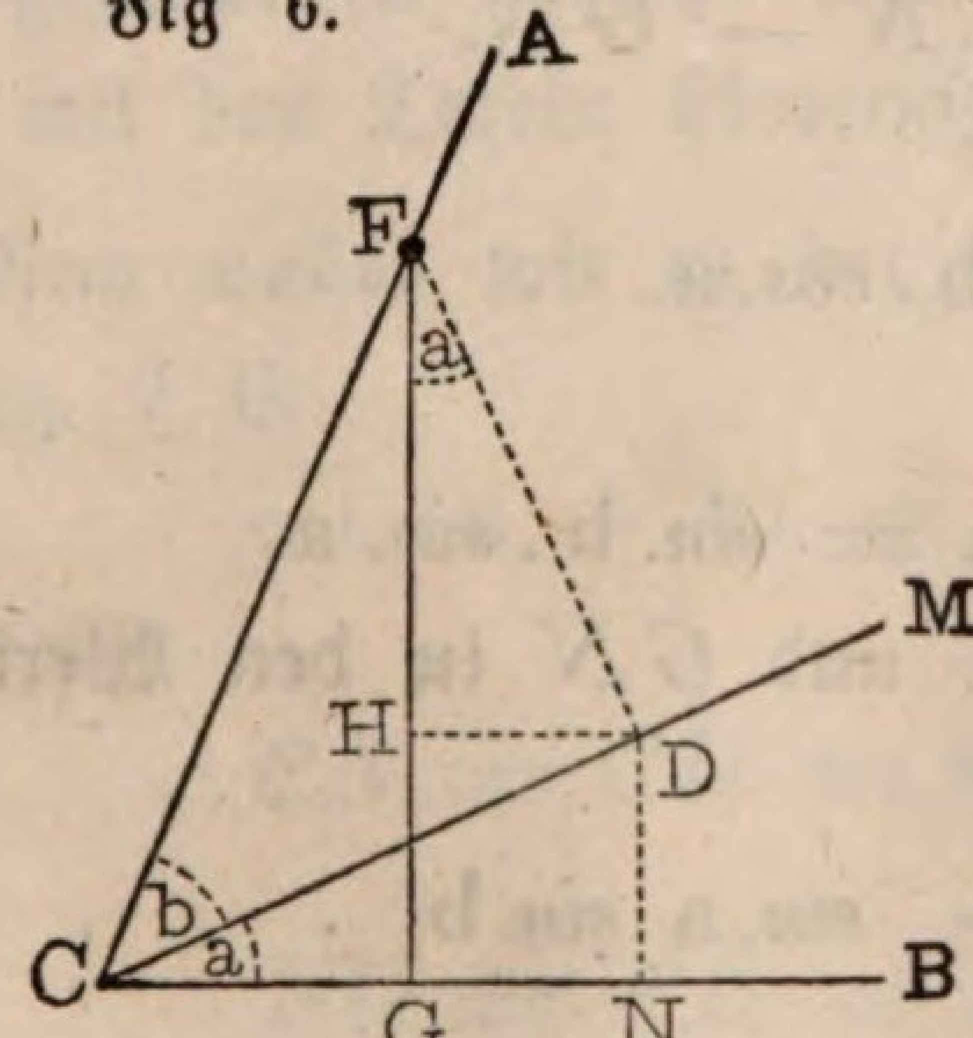
Der nächst größere ist 0,601815 und dieser gehört einem Winkel von 37^0 an. Der gesuchte Winkel liegt also zwischen $36^0 50'$ und 37^0. Nach dem in §. 3 angegebenen Verfahren kann der Winkel genau bestimmt werden.

Es sei 15 die Hypotenuse, 4 die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, so ist $^4/_{15}$ der Sinus des Winkels, welcher der Kathete 4 gegenüberliegt, und der Cosinus des Winkels, welchen diese Kathete mit der Hypotenuse bildet. Es ist $^4/_{15} = 0,26666\ldots$ wie groß sind demnach die beiden spitzen Winkel des fraglichen Dreiecks?

Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel. Wenn Sinus und Cosinus zweier Winkel a und b bekannt sind, so kann man den Sinus und den Cosinus der Winkel (a + b) und (a — b) berechnen, und zwar mit Hülfe einiger Formeln, die sogleich entwickelt werden sollen. 9

In Fig. 6 sind die Winkel a und b so zusammengestellt, daß sie einen Schenkel CM und den Scheitel gemeinschaftlich haben, und daß die Schenkel CA und CB einen Winkel mit einander machen, welcher der Summe der Winkel a und b gleich ist. Bezeichnet man auf dem Schenkel CA des Winkels b, welcher den beiden Winkeln a und b **nicht** gemeinschaftlich ist, einen Punkt F so, daß $CF = 1$, so ist das von F auf CB gefällte Perpendikel

Fig 6.



$$FG = sin.\ (a + b).$$

Ferner ist das von F auf den den Winkeln a und b gemeinschaftlichen Schenkel gefällte Perpendikel

$$DF = sin.\, b$$

und also auch

$$CG = cos.\ (a + b)$$

$$CD = cos.\, b.$$

Fällt man nun von D das Perpendikel DH auf FG, so wird dadurch FG in zwei Theile getheilt, und es ist

$$sin.\ (a + b) = GH + HF.$$

Es kommt nun darauf an, die beiden Stücke GH und HF zu

berechnen. Es ist offenbar $HG = DN$; DN aber ist die eine Kathete des rechtwinkeligen Dreiecks CDN, folglich ist $DN = CD \,.\, sin.\, a$ (§. 6); da aber $CD = cos.\, b$, so ist

$$GH = DN = cos.\, b\ sin.\, a.$$

Der Winkel HFD ist aber gleich dem Winkel a (Geometrie §. 8), folglich ist $FH = FD \,.\, cos.\, a$; setzt man für DF seinen Werth $sin.\, b$, so kommt

$$HF = sin.\, b\ cos.\, a.$$

Setzt man nun endlich die gefundenen Werthe von HF und HG in den Werth von $sin.\, (a + b)$, so kommt

$$sin.\, (a + b) = sin.\, a\ cos.\, b + sin.\, b\ cos.\, a \quad .\ .\ .\ .\ (8)$$

Wir wollen diese Formel anwenden, um $sin.\, 75^0$ zu berechnen; $75^0 = 45^0 + 30^0$, mithin ist $sin.\, 75^0 = sin.\, 45^0 \times cos.\, 30^0 + sin.\, 30^0 \times cos.\, 45$, und wenn man für $sin.\, 45^0$, $cos.\, 45^0$, $sin.\, 30^0$ und $cos.\, 30^0$ die oben in §. 5 schon berechneten Werthe setzt,

$$sin.\, 75^0 = 0{,}707107 \times 0{,}866025 + 0{,}5 \times 0{,}707107 = 0{,}965926.$$

Aus derselben Figur läßt sich auch ein Werth für $cos.\, (a + b)$ ableiten.

$$CG = cos.\, (a + b) = CN - GN.$$

Aus dem Dreieck CDN ergiebt sich

$$CN = CD \,.\, cos.\, a = cos.\, b \,.\, cos.\, a.$$

Es ist aber ferner

$$GN = HD = FD \,.\, sin.\, a = sin.\, b \,.\, sin.\, a.$$

Setzt man diese Werthe von CN und GN in den Werth von $cos.\, (a + b)$, so kommt:

$$cos.\, (a + b) = cos.\, a\ cos.\, b - sin.\, a\ sin.\, b \quad .\ .\ .\ .\ (9)$$

nach dieser Formel ist also

$$cos.\, 75^0 = cos.\, 45^0\ cos.\, 30^0 - sin.\, 45^0\ sin.\, 30^0.$$

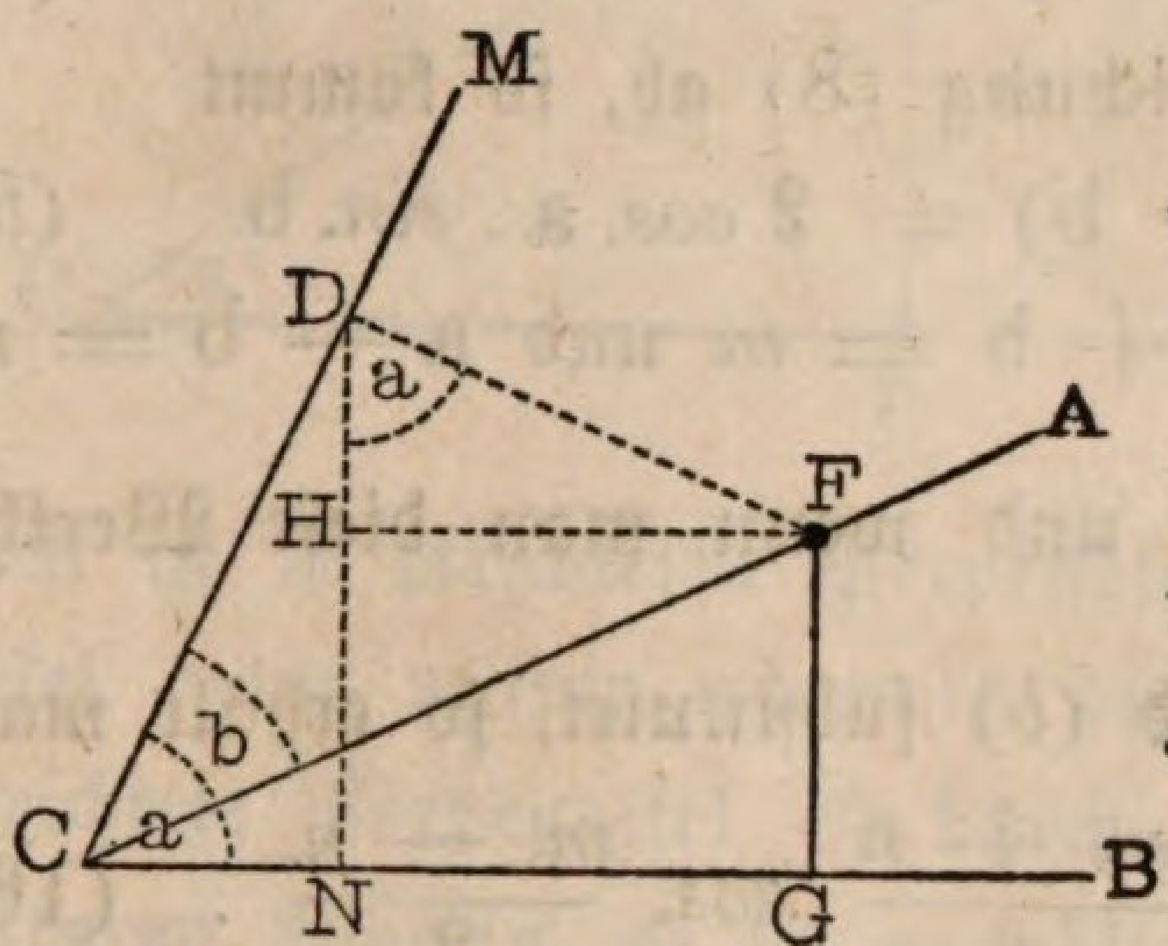
Der Schüler führe diese Rechnung aus und vergleiche das Resultat mit dem in der angehängten Tafel stehenden Werth von $cos.\, 75^0$.

10 **Sinus und Cosinus der Differenz zweier Winkel.** Auf ähnliche Weise läßt sich auch $sin.\, (a - b)$ und $cos.\, (a - b)$ bestimmen. Es sei in Fig. 7 $\measuredangle MCB = a$, $\measuredangle MCA = b$, so ist $\measuredangle ACB = a - b$. Der Schenkel MC ist den beiden Winkeln a und b gemeinschaftlich. Bezeichnet man auf dem Schenkel CA des Winkels b, welcher den Winkeln a und b nicht gemeinschaftlich ist, einen Punkt F, so daß $FC = 1$, so ist das Perpendikel

$$FG = sin. (a - b)$$
$$CG = cos. (a - b)$$
$$FD = sin. b$$
$$CD = cos. b.$$

Fällt man ferner von F ein Perpendikel FH auf DN, so hat man

Fig. 7.



$$FG = HN = DN - DH. \quad (I)$$

Da aber

$$DN = CD . sin. a = cos. b . sin. a$$

und

$$DH = DF . cos. a = sin. b . cos. a,$$

so ist endlich, wenn man für FG, DN und DH ihre Werthe in (I) setzt,

$$sin. (a - b) = sin. a . cos. b - cos. a \, sin. b \quad (10)$$

Nach dieser Formel ist

$$sin. 15^0 = sin. (45^0 - 30^0) = sin. 45^0 . cos. 30^0 - sin. 30^0 \, cos. 45^0.$$

Man setze hier für $sin. 45^0$, $cos. 45^0$, $sin. 30^0$ und $cos. 30^0$ die oben gefundenen Werthe und führe die Rechnung aus, so wird man einen mit den Tafeln übereinstimmenden Werth finden.

Nun wollen wir zu der Berechnung von $cos. (a - b)$ übergehen. In Fig. 7 ist

$$cos. (a - b) = CG = CN + NG$$

es ist aber

$$CN = CD \, cos. a = cos. b \, cos. a$$

und

$$NG = FH = DF \, sin. a = sin. b \, sin. a$$

also

$$cos. (a - b) = cos. a \, cos. b + sin. a \, sin. b \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Nach dieser Formel ist

$$cos. 15^0 = cos. 45^0 . cos. 30^0 + sin. 45^0 . sin. 30^0.$$

Die Rechnung ist auszuführen.

Entwickelung weiterer Formeln. I. Setzt man in Gleichung (8) b = a, so kommt 11

$$sin. 2a = 2 \, sin. a \, cos. a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Auf dieselbe Weise erhält man aus Gleichung (9)

$$cos. 2a = (cos. a)^2 - (sin. a)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung für $\cos. a^2$ seinen Werth, $1 - (\sin. a)^2$, so kommt

$$\cos. 2a = 1 - 2 (\sin. a)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

und wenn man in Gleichung (13) für $(\sin. a)^2$ seinen Werth $1 - (\cos. a)^2$ setzt,

$$\cos. 2a = 2 (\cos. a)^2 - 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

II. Summirt man Gleichung (8) und Gleichung (10), so kommt

$$\sin. (a + b) + \sin. (a - b) = 2 \sin. a . \cos. b \qquad (a)$$

Zieht man Gleichung (10) von Gleichung (8) ab, so kommt

$$\sin. (a + b) - \sin. (a - b) = 2 \cos. a . \sin. b \qquad (b)$$

Setzt man in diesen Gleichungen $a + b = m$ und $a - b = n$, so ist $a = \frac{m + n}{2}$ und $b = \frac{m - n}{2}$, und wenn man diese Werthe von a und b in die Gleichungen (a) und (b) substituirt, so erhält man

$$\sin. m + \sin. n = 2 \sin. \frac{m + n}{2} . \cos. \frac{m - n}{2} \quad . \quad (16)$$

$$\sin. m - \sin. n = 2 \cos. \frac{m + n}{2} . \sin. \frac{m - n}{2} \quad . \quad (17)$$

III. Summirt man die Gleichungen (9) und (11), so kommt

$$\cos. (a + b) + \cos. (a - b) = 2 . \cos. a . \cos. b$$

und wenn man für a und b ihre Werthe $\frac{m + n}{2}$ und $\frac{m - n}{2}$ setzt,

$$\cos. m + \cos. n = 2 \cos. \frac{m + n}{2} . \cos \frac{m - n}{2} \quad . \quad (18)$$

Zieht man dagegen die Gleichung (9) von Gleichung (11) ab, so kommt

$$\cos. (a - b) - \cos. (a + b) = 2 \sin. a . \sin. b$$

und wenn man für a und b ihre obigen Werthe setzt,

$$\cos. n - \cos. m = 2 \sin. \frac{m + n}{2} . \sin. \frac{m - n}{2} .$$

12

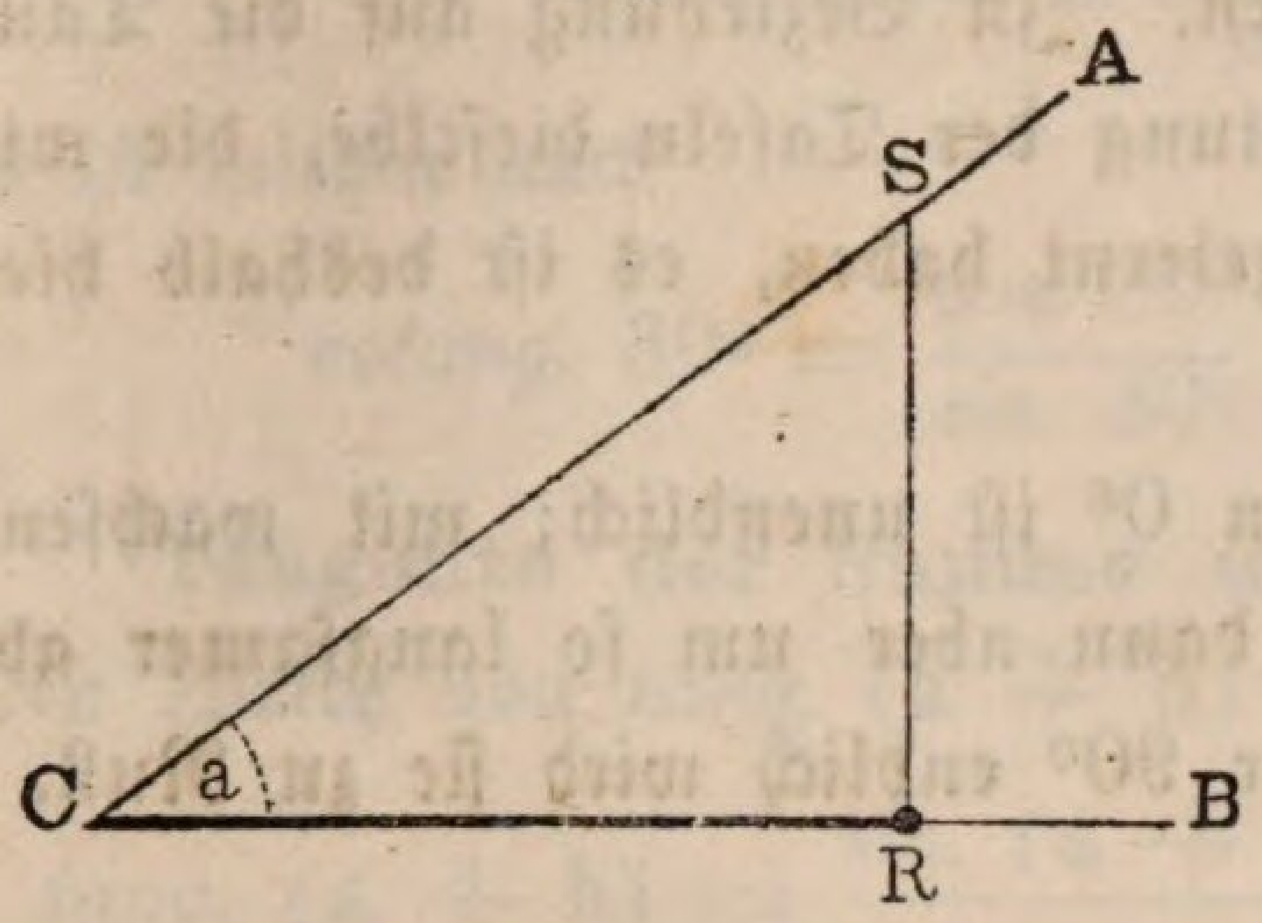
Construction der Tangente. Bezeichnet man auf dem einen Schenkel CB eines Winkels a, Fig. 8, einen Punkt R, der um die Längeneinheit vom Scheitel C entfernt ist; errichtet man alsdann in R ein Perpendikel, so heißt das zwischen beide Schenkel fallende Stück RS dieses Perpendikels Tangente des Winkels a.

Zur Uebung construire man $tang.\ 10^0$, $tang.\ 19^0$, $tang.\ 36^0$, $tang.\ 45^0$, $tang.\ 54^0$ u. s. w.

Wenn der Winkel 0 ist, so ist seine Tangente ebenfalls 0; mit

wachsendem Winkel wächst auch die Tangente; sie wird = 1 für a = 45°, denn in diesem Fall ist in Fig. 8 jeder der beiden spitzen Winkel des Dreiecks CRS gleich 45°, das Dreieck

Fig. 8.

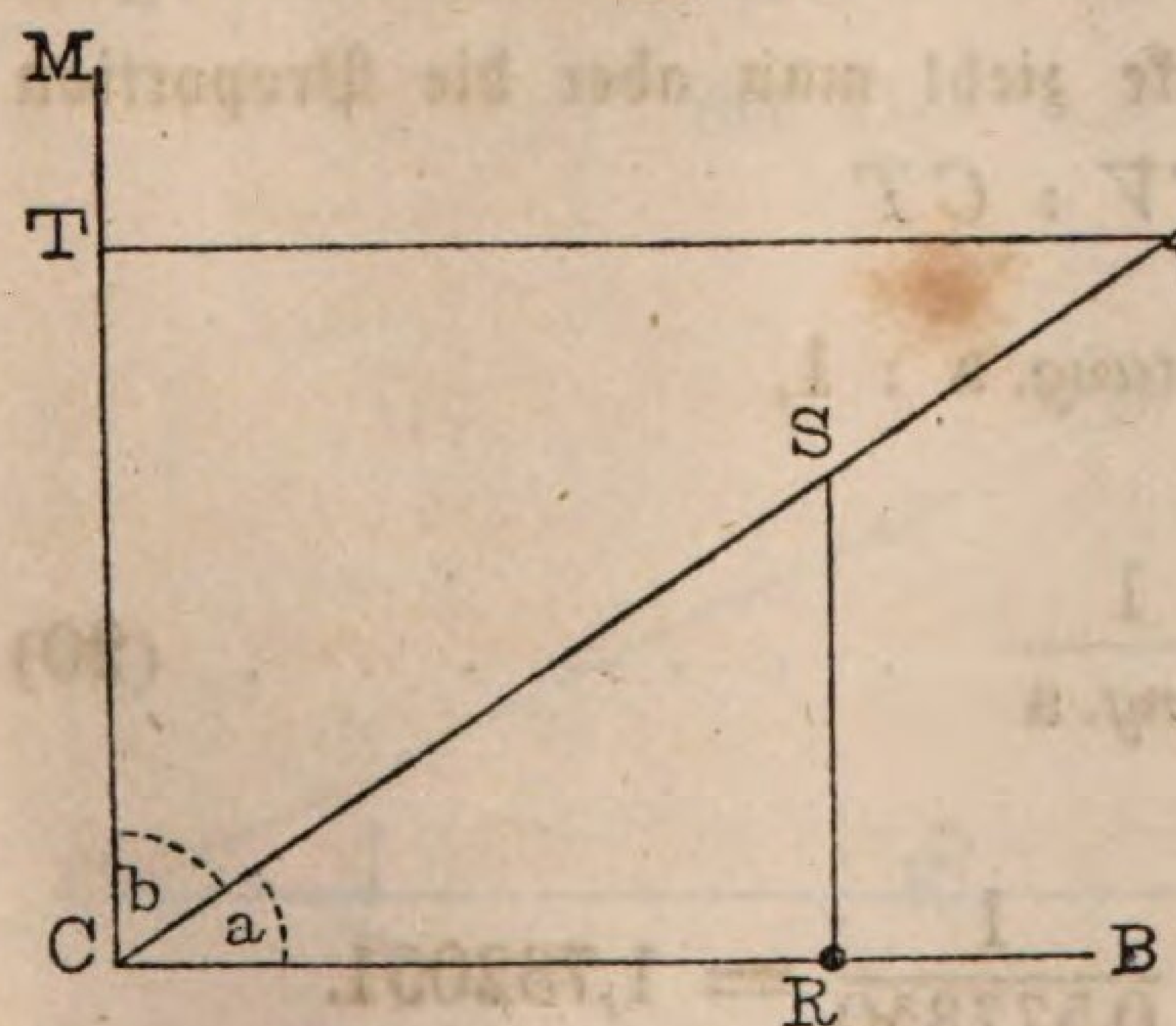


selbst muß also ein gleichschenkeliges sein, folglich ist für diesen Fall $CR = RS = 1$. Wächst a über 45° hinaus, so wächst *tang.* a fortwährend, bis endlich für einen rechten Winkel die Tangente unendlich wird; denn wenn a ein rechter Winkel ist, so läuft der Schenkel CA mit dem in R errichteten Perpendikel parallel, das in R errichtete Perpendikel kann mithin niemals diesen Schenkel durchschneiden. Das in R errichtete Perpendikel ist durch diesen Schenkel nicht begränzt, oder mit anderen Worten, es ist unendlich.

Die Tangente wächst nicht in demselben Verhältniß wie der Winkel. Wenn der Winkel von 0° an wächst, wächst die Tangente anfangs langsam; dann schneller und schneller, je mehr sich der Winkel einem rechten nähert. Dies kann man mit anderen Worten auch so ausdrücken: wenn man irgend einen Winkel a um einen Winkel b wachsen läßt, so ist der entsprechende Wachsthum der Tangente um so größer, je näher a einem rechten Winkel ist. Läßt man z. B. einen Winkel von 70° um 10° wachsen, so ist der entsprechende Wachsthum der Tangente größer, als wenn man einen Winkel von 20° um 10° wachsen ließe.

Construction der Cotangente. Errichtet man im Scheitel C des 13
Winkels a, Fig. 9, ein Perpendikel auf dem Schenkel CB, so ist der dadurch entstehende Winkel b der

Fig. 9.



Ergänzungswinkel von a, also a + b = 90°. Macht man auf diesem Perpendikel $CT = 1$, zieht man dann durch T eine Linie parallel mit CB, so ist das Stück TV derselben die Tangente des Winkels b. Die Tangente des Ergänzungswinkels b führt aber auch den Namen Cotangente von a, es ist also

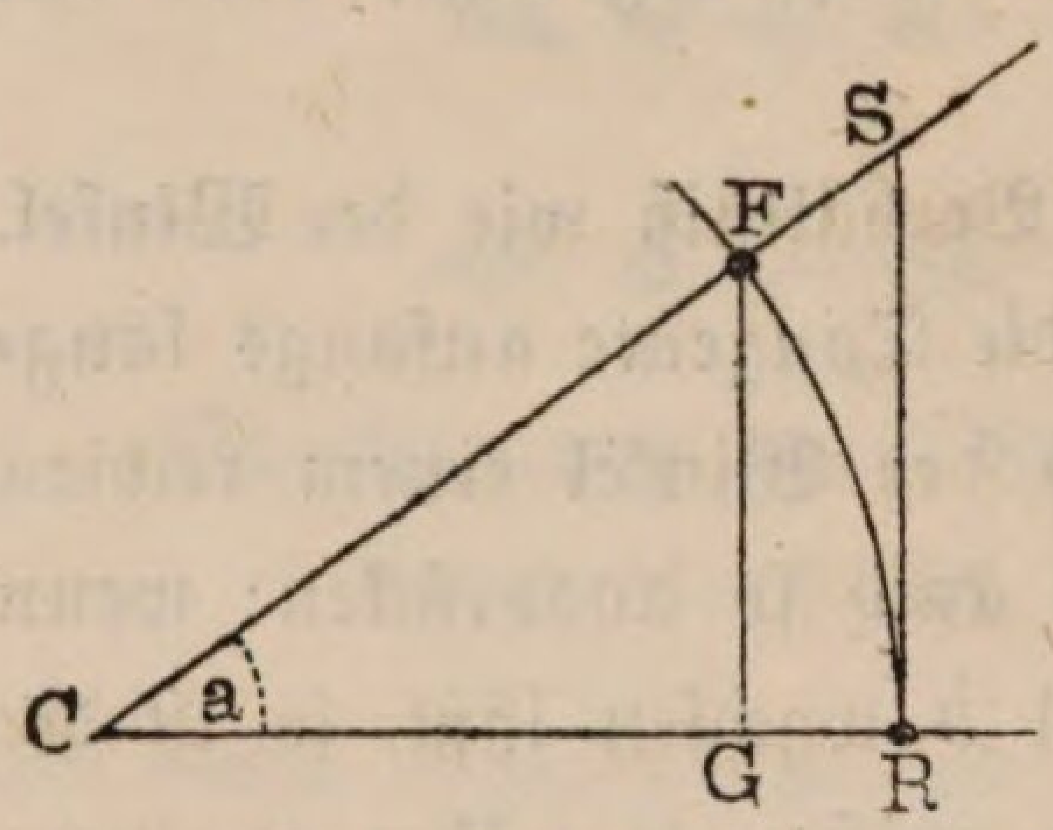
$$cotang.\, a = tang.\, (R - a).$$

So ist z. B. *tang.* 30° = *cotang.* 60°, *tang.* 18° = *cotang.* 72° u. s. w. Es reicht deshalb hin, in den Tafeln die Tangenten und Cotangenten der Winkel von 0° bis 45° einzutragen. In Beziehung auf die Tangenten und Cotangenten ist die Einrichtung der Tafeln dieselbe, die wir oben für Sinus und Cosinus kennen gelernt haben, es ist deshalb hier keine weitere Erläuterung nöthig.

Die Cotangente eines Winkels von 0° ist unendlich; mit wachsendem Winkel nimmt sie anfangs rasch, dann aber um so langsamer ab, je mehr der Winkel sich 90° nähert, für 90° endlich wird sie zu Null.

14 **Relation zwischen Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente.** In Fig. 10 sei $CR = CF = 1$, FG und RS rechtwinkelig auf CR, so ist $CG = cos.\, a$, $FG = sin.\, a$, $RS = tang.\, a$. Man hat aber offenbar

Fig. 10.



$$CG : GF = CR : RS,$$

oder was dasselbe ist

$$cos.\, a : sin.\, a = 1 : tang.\, a,$$

und daraus

$$tang.\, a = \frac{sin.\, a}{cos.\, a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Nach dieser Formel kann man die Tangente eines Winkels berechnen, wenn Sinus und Cosinus desselben bekannt sind, so ist z. B.

$$tang.\, 30^0 = \frac{sin.\, 30^0}{cos.\, 30^0} = \frac{0{,}5}{0{,}866025} = 0{,}577350.$$

In Fig. 9 sind die beiden Dreiecke CRS und CTV ähnlich, denn es ist leicht zu zeigen, daß Winkel $CSR = b$ und Winkel $CVT = a$ ist. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke zieht man aber die Proportion

$$CR : RS = TV : CT$$

oder

$$1 : tang.\, a = cotang.\, a : 1,$$

woraus folgt

$$cotang.\, a = \frac{1}{tang.\, a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Demnach ist

$$cotang.\, 30^0 = \frac{1}{tang.\, 30^0} = \frac{1}{0{,}577350} = 1{,}732051.$$

Setzt man in Gleichung (20) für *tang.* a seinen Werth $\frac{sin.\,a}{cos.\,a}$, so kommt:

$$cotang.\,a = 1 : \frac{sin.\,a}{cos.\,a} = \frac{cos.\,a}{sin.\,a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

es ist mithin auch

$$cotang.\,30^0 = \frac{cos.\,30^0}{sin.\,30^0} = \frac{0{,}866025}{0{,}5} = 1{,}732051.$$

Tangente der Summe und der Differenz zweier Winkel. 15
Den Werth von *tang.* (a + b) findet man auf folgende Weise:

$$tang.\,(a+b) = \frac{sin.\,(a+b)}{cos.\,(a+b)} = \frac{sin.\,a\;cos.\,b + sin.\,b\;cos.\,a}{cos.\,a\;cos.\,b - sin.\,a\;sin.\,b};$$

dividirt man Zähler und Nenner durch *cos.* a *cos.* b, so kommt

$$tang.\,(a+b) = \frac{\frac{sin.\,a}{cos.\,a} + \frac{sin.\,b}{cos.\,b}}{1 - \frac{sin.\,a}{cos.\,a} \cdot \frac{sin.\,b}{cos.\,b}}$$

und daraus endlich

$$tang.\,(a+b) = \frac{tang.\,a + tang.\,b}{1 - tang.\,a\;tang.\,b} \quad . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Auf ähnliche Weise findet man *tang.* (a — b):

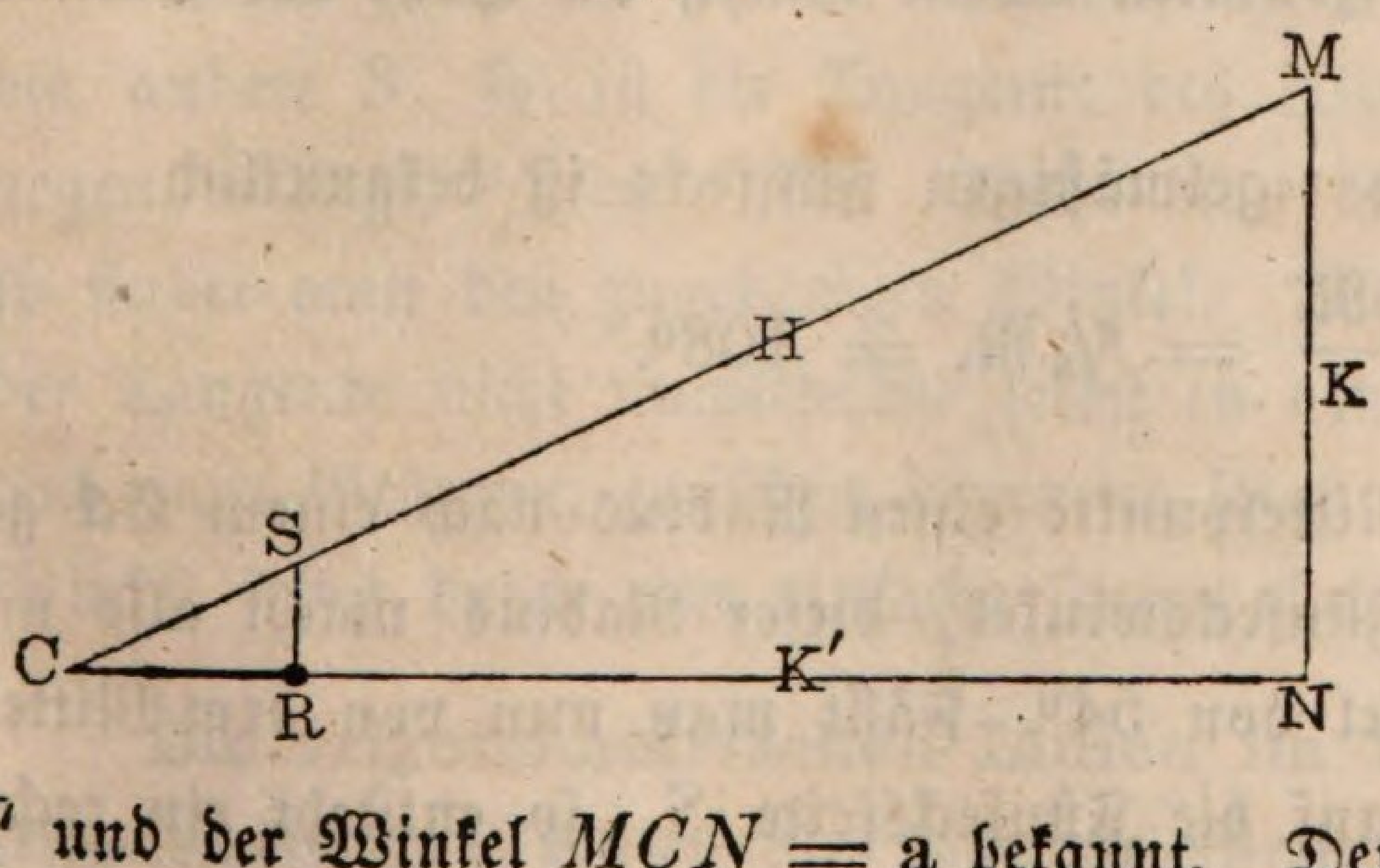
$$tang.\,(a-b) = \frac{sin.\,(a-b)}{cos.\,(a-b)} = \frac{sin.\,a\;cos.\,b - sin.\,b\;cos.\,a}{cos.\,a\;cos.\,b + sin.\,a\;sin.\,b}$$

und daraus

$$tang.\,(a-b) = \frac{tang.\,a - tang.\,b}{1 + tang.\,a\;tang.\,b} \quad . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Anwendung der Tangente bei der Berechnung rechtwinkeliger Dreiecke. Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck eine Kathete 16

Fig. 11.



und der Winkel bekannt ist, welcher der unbekannten Kathete gegenüberliegt, so kann man mit Hülfe der Tangente dieses Winkels die fehlende Kathete berechnen. In dem rechtwinkeligen Dreieck *CNM*, Fig. 11, sei die Kathete *K'* und der Winkel *MCN* = a bekannt. Denkt man sich auf *K'* einen

Punkt R bezeichnet, dessen Entfernung von dem Scheitel C des Winkels a gleich 1 ist, und in R ein Perpendikel RS errichtet, so ist dieses Perpendikel *tang.* a; man hat wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$1 : tang.\,a = K' : K$$

und daraus

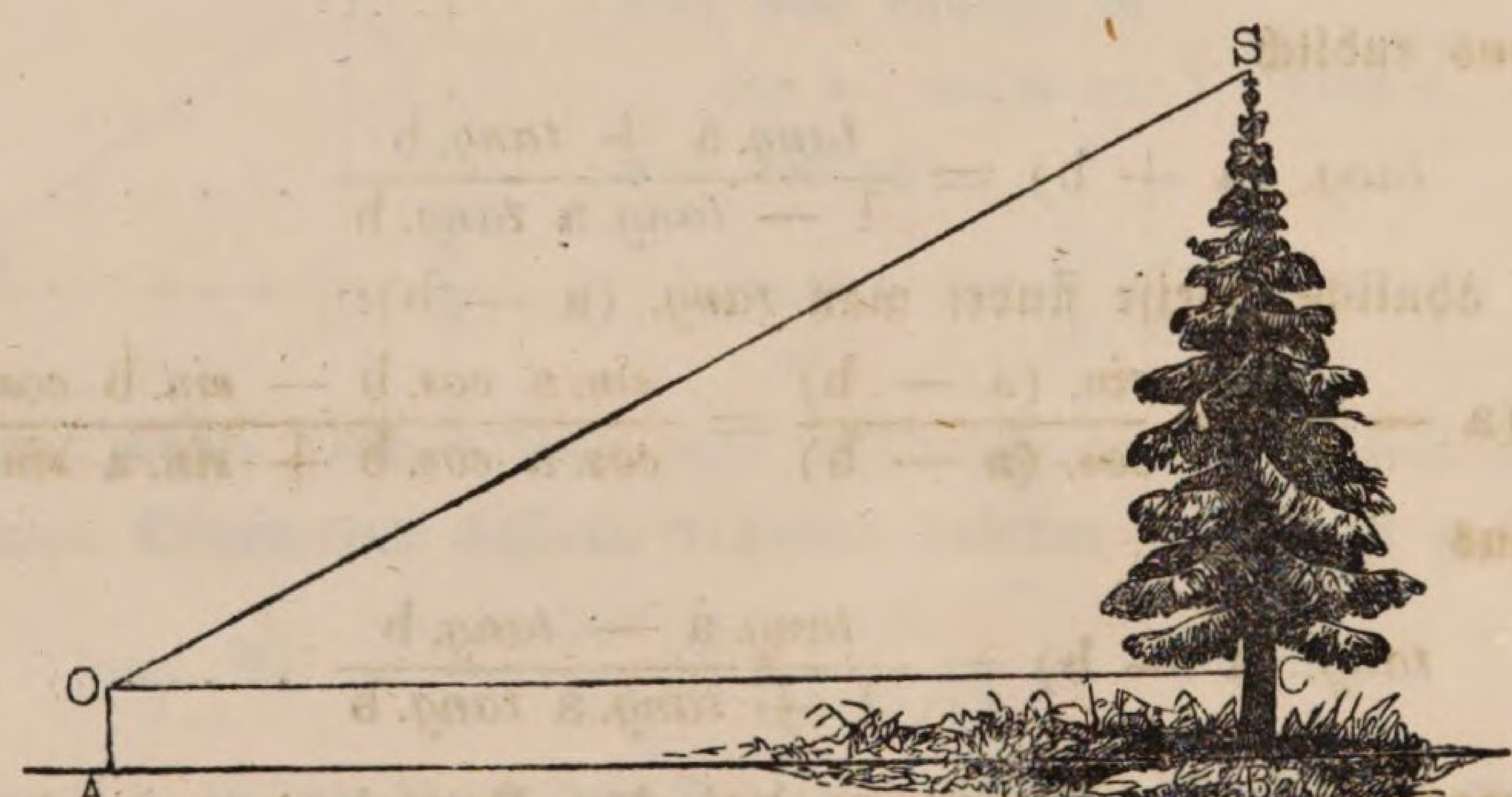
$$K = K' \; tang.\,a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

das heißt mit Worten: man findet die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, wenn man die andere Kathete mit der Tangente desjenigen Winkels multiplicirt, welcher der gesuchten Kathete gegenüberliegt.

Beispiele. 1. Die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks sei 327′, der Winkel, den sie mit der Hypotenuse bildet, sei 25°; wie groß ist die andere Kathete?

2. Wenn ein Beobachter 156′ weit von einem Baume entfernt ist, wenn sein Auge O, Fig. 12, 5′ über dem Boden sich befindet, und die

Fig. 12.



durch das Auge nach dem Gipfel des Baumes gerichtete Gerade einen Winkel von 36° mit der horizontalen Ebene macht, die Höhe des Baumes zu berechnen.

3. Der Eckwinkel eines regelmäßigen Fünfecks ist bekanntlich

$$\frac{2 \,.\, 5\,\mathfrak{R}. - 4\,\mathfrak{R}.}{5} = {}^6/_5\,\mathfrak{R}. = 108^0.$$

Denkt man sich von dem Mittelpunkte einen Radius nach einem Eck gezogen, so halbirt er den Fünfeckswinkel, dieser Radius macht also mit der Fünfecksseite einen Winkel von 54°. Fällt man nun von dem Mittelpunkte ein Perpendikel p auf die Fünfecksseite S, so entsteht ein recht-

winkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse der Radius, dessen eine Kathete die halbe Fünfecksseite $S.\,{}^1\!/_2$, und dessen andere Kathete das Perpendikel p ist. Der Winkel, welcher dem Perpendikel p gegenüberliegt, ist 54^0, man hat demnach

$$p = \frac{S}{2}\,.\,tang.\,54^0.$$

Da nun der halbe Umfang des Fünfecks $\frac{5\,S}{2}$ ist, und man den Flächeninhalt J des regelmäßigen Fünfecks erhält, wenn man den halben Umfang mit dem Perpendikel p multiplicirt, so ergiebt sich

$$J = \frac{5\,S}{2}\,.\,\frac{S}{2}\,.\,tang.\,54^0 = {}^5\!/_4\,S^2\,.\,tang.\,54^0.$$

Wie groß ist der numerische Werth von J, wenn $S = 2{,}7''$?

Durch ganz ähnliche Betrachtungen erhält man allgemein den Inhalt eines regelmäßigen Vielecks von N Seiten.

$$J = \frac{NS}{2}\,.\,\frac{S}{2}\,.\,tang.\left(\frac{2\,N\,\mathfrak{R}. - 4\,\mathfrak{R}.}{2\,N}\right).$$

Der Schüler darf nicht eher weiter gehen, als bis er sich vollständig von der Richtigkeit dieser Formel überzeugt hat. Setzt man z. B. in diese Formel $N = 10$ und $S = 9''$, so erhält man den Inhalt eines regelmäßigen Zehnecks, an welchem jede Seite $9''$ lang ist. Wie groß ist der Inhalt eines regelmäßigen Zwölfecks, wenn jede Seite $3{,}5'$ lang ist?

Aus der Gleichung $K = K'\,tang.\,\mathrm{a}$ folgt:

$$tang.\,\mathrm{a} = \frac{K}{K'}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(25)$$

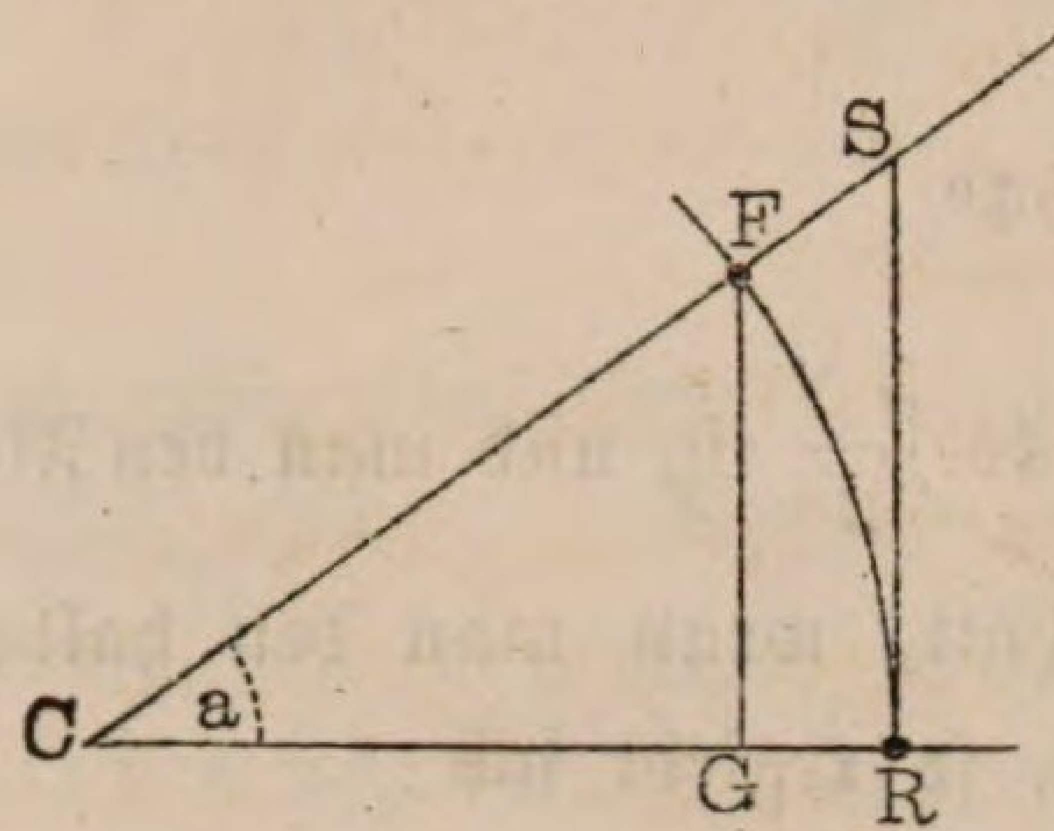
das heißt in Worten: man findet die Tangente eines Winkels in einem rechtwinkeligen Dreieck, wenn man die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete durch die ihm anliegende dividirt.

Wäre z. B. in einem rechtwinkeligen Dreieck die eine Kathete 4, die andere 3, so ist die Tangente des Winkels, welcher der Kathete 3 gegenüberliegt, ${}^3\!/_4 = 0{,}75$. Sucht man diese Tangente in den Tafeln, so findet man den zugehörigen Winkel. Wenn sich der berechnete Werth der Tangente nicht unmittelbar selbst in den Tafeln findet, so finden sich doch zwei Gränzen, zwischen denen er liegt, und man kann alsdann den Winkel selbst durch eine einfache Interpolation (§. 3) bestimmen.

Die trigonometrischen Linien im Kreise. Häufig werden die trigonometrischen Linien auf folgende Weise definirt: **17**

Zieht man in einem Kreise, dessen Halbmesser gleich 1 ist, zwei Radien CF und CR, Fig. 13, die einen Winkel a mit einander machen, so heißt das vom Endpunkt F des einen Radius auf den andern gefällte Perpendikel FG Sinus des Winkels a, cd aber der Cosinus desselben.

Fig. 13



Zieht man in R eine Berührende an den Kreis, so ist das Stück derselben, welches zwischen R und der Verlängerung des Halbmessers CF liegt, die Tangente des Winkels a. Die Tangente des Winkels, welche den Winkel a zu einem rechten ergänzt, heißt Cotangente des Winkels a.

Man wird sich leicht überzeugen können, daß diese Definitionen sich nicht im Wesentlichen von den oben gegebenen unterscheiden.

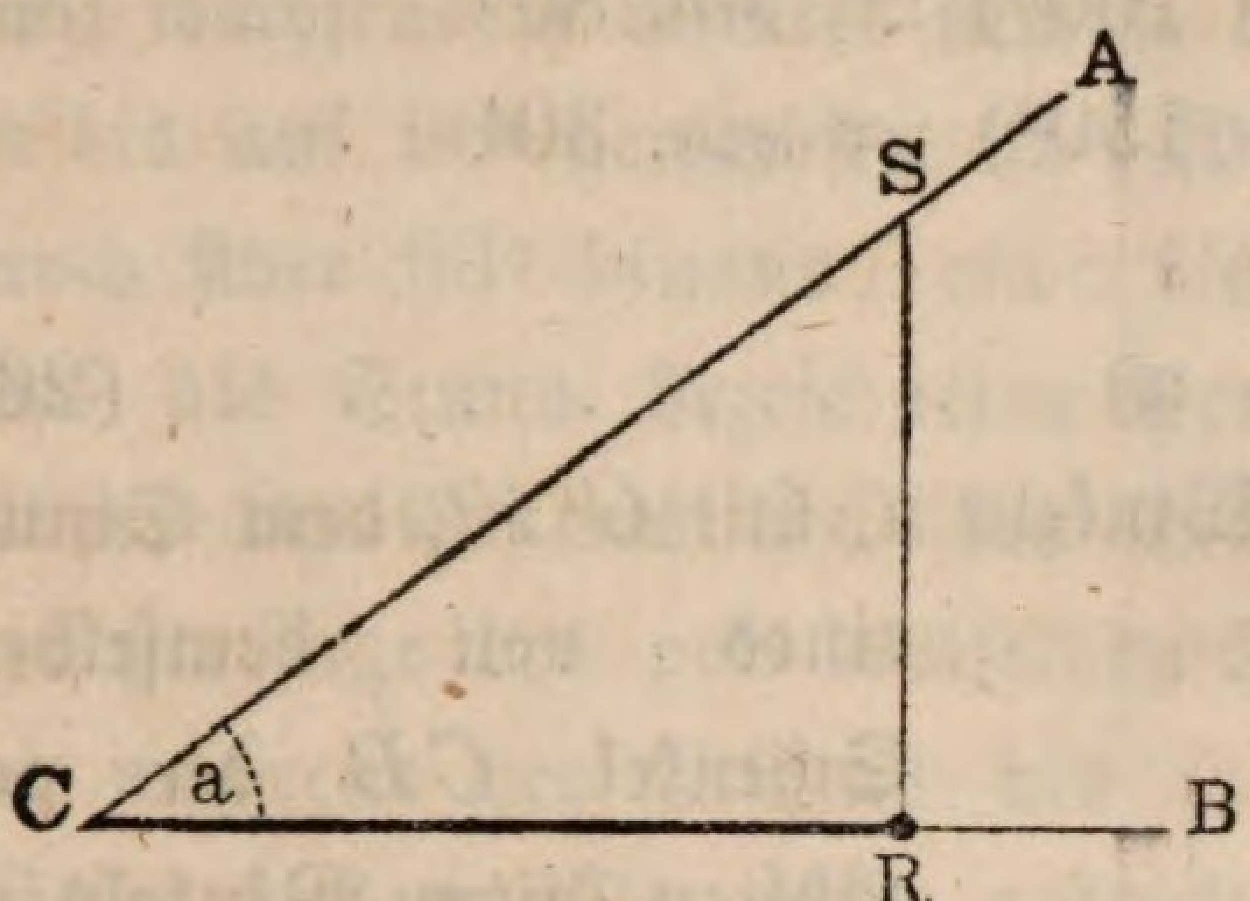
Construirt man in einem Kreise, dessen Radius nicht 1, sondern 10 000 000 000 ist, Linien, welche den trigonometrischen Linien entsprechen, so sind sie natürlich zehntausend Millionen mal größer als die in einen Kreis construirten, dessen Radius 1 ist. So ist z. B. $sin. 36^0 = 0{,}587785$, und die diesem Sinus entsprechende, in einen Kreis von einem Radius gleich 10 000 000 000 construirte Linie ist 5 877 850 000. (Die letzten vier mit 0 ausgefüllten Stellen sind natürlich nicht genau.) Der Logarithme dieser letzteren Zahl ist demnach auch um 10 größer, als der Logarithme von $sin. 36^0$. In den meisten logarithmisch trigonometrischen Tafeln findet man also nicht die Logarithmen der eigentlichen trigonometrischen Linien, sondern die Logarithmen derjenigen Linien, welche, dem Sinus, Cosinus, der Tangente und Cotangente entsprechend, in einen Kreis construirt sind, dessen Radius 10 000 000 000 ist.

18 **Secante, Cosecante und Sinus Versus.** Bis jetzt war nur von den vier trigonometrischen Linien die Rede, welche sich in den Tafeln finden, nämlich vom Sinus, vom Cosinus, der Tangente und der Cotangente. Wir haben nun noch einige andere trigonometrische Functionen zu betrachten, welche zwar weniger oft bei praktischen Rechnungen vorkommen, deren man sich aber oft zur Vereinfachung zusammengesetzter Formeln bedienen kann.

Die Secante des Winkels a ist die Hypotenuse CS des recht-

winkeligen Dreiecks CSR, Fig. 14, dessen eine Kathete CR gleich 1, dessen andere Kathete RS aber gleich *tang.* a ist. Es ist demnach

Fig. 14.



$$(sec.\,a)^2 = 1 + (tang.\,a)^2.$$

Setzt man für *tang.* a seinen Werth $\frac{sin.\,a}{cos.\,a}$, so kommt

$$(sec.\,a)^2 = 1 + \frac{(sin.\,a)^2}{(cos.\,a)^2}$$

oder

$$(sec.\,a)^2 = \frac{(cos.\,a)^2 + (sin.\,a)^2}{(cos.\,a)^2} = \frac{1}{(cos.\,a)^2}$$

also

$$sec.\,a = \frac{1}{cos.\,a}.$$

Man hätte diesen Werth von *sec.* a auch direct aus der Betrachtung der Figur ableiten können.

Die Cosecante des Winkels a ist die Secante des Winkels, welcher den Winkel a zu einem rechten ergänzt, demnach also

$$(cosec.\,a)^2 = 1 + (cotang.\,a)^2$$

und

$$cosec.\,a = \frac{1}{sin.\,a}.$$

Der Sinus Versus oder Quersinus eines Winkels a wird erhalten, wenn man *cos.* a von 1 abzieht. Es ist also

$$sin.\,vers.\,a = 1 - cos.\,a.$$

Die trigonometrischen Functionen stumpfer Winkel. Wenn 19
man nach den in den §§. 1, 12 und 13 gegebenen Definitionen den Sinus und den Cosinus, die Tangente und die Cotangente stumpfer Winkel zu construiren versucht, so treffen die nach den citirten Angaben zu fällenden oder zu errichtenden Perpendikel nicht mehr den andern Schenkel des Winkels, sondern dessen Verlängerung, und dadurch treten Modificationen ein, welche wir näher betrachten müssen.

Schneidet man auf dem einen Schenkel CA, Fig. 15 (a. f. S.), eines stumpfen Winkels BCA, den wir mit a bezeichnen wollen, ein Stück CF ab, welches der Längeneinheit gleich ist, so trifft eine durch F rechtwinkelig zum andern Schenkel CB gezogene Linie nicht mehr den Schenkel CB selbst, sondern dessen Verlängerung CD.

Das Perpendikel FG ist nun der Sinus des stumpfen Winkels a. Dieses Perpendikel ist aber auch der Sinus des Winkels b,

welcher a zu 180° ergänzt oder mit anderen Worten: **der Sinus eines stumpfen Winkels ist gleich dem Sinus seines spitzen Nebenwinkels**; es ist also z. B.

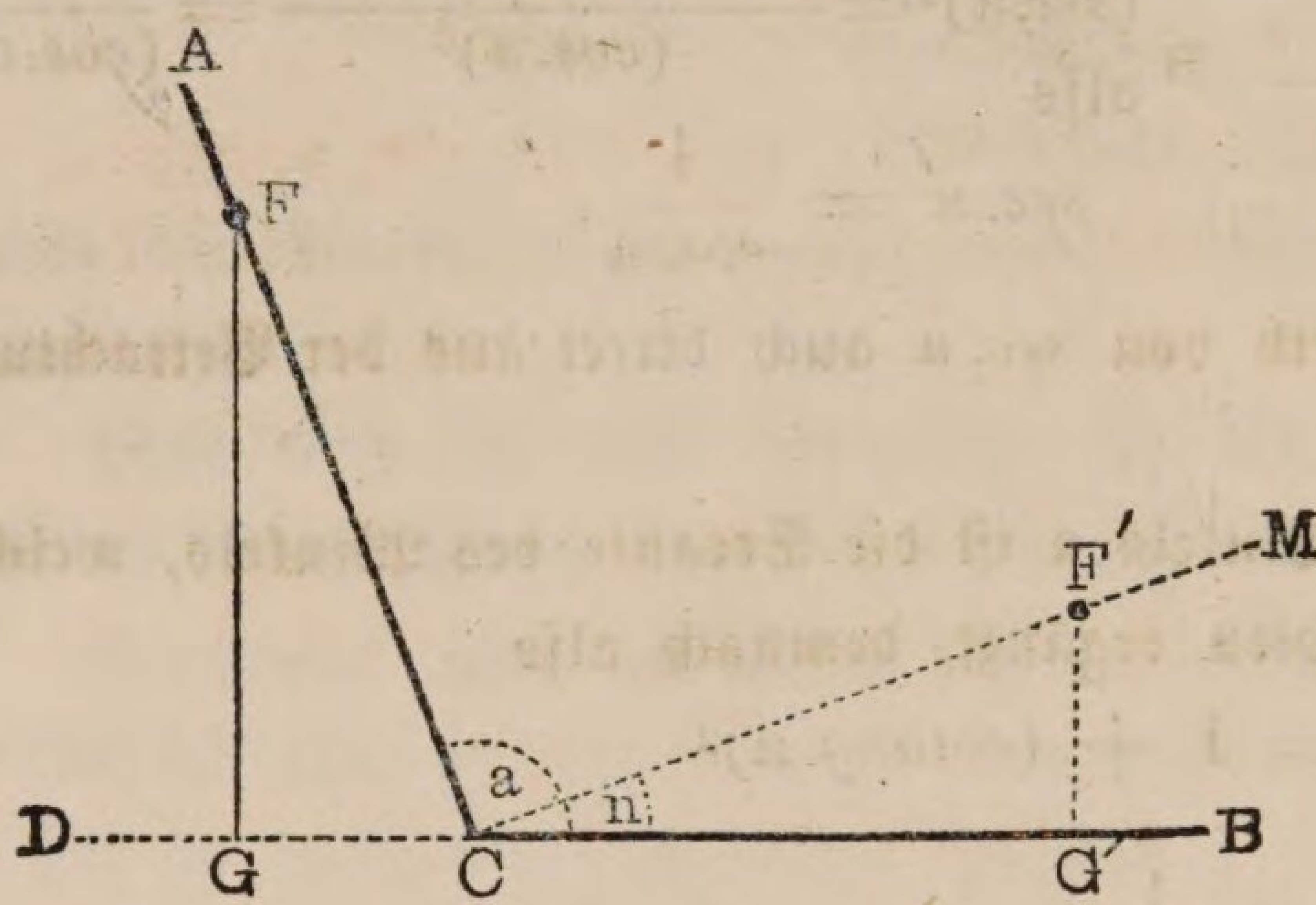
$$sin.\ 100^\circ = sin.\ (180^\circ - 100^\circ) = sin.\ 80^\circ$$
$$sin.\ 150^\circ = sin.\ (180^\circ - 150^\circ) = sin.\ 30^\circ$$

oder allgemein

$$sin.\ a = sin.\ (180^\circ - a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Da GF, der Sinus des stumpfen Winkels a, mit $G'F'$, dem Sinus eines von demselben Schenkel CB an gezählten spitzen Winkels n, gleiche Lage zu der Richtung des Schenkels CB hat, indem beide oberhalb DB liegen, so kommt also dem Sinus eines stumpfen Winkels dasselbe Vorzeichen zu wie dem Sinus eines spitzen.

Fig. 15.



Daraus geht nun hervor, daß jeder Sinus zu gleicher Zeit zwei Winkeln angehört, einem spitzen und einem stumpfen. So gehört z. B. der Sinus 0,422618 dem Winkel von 25° und dem Winkel von 155° an; der Sinus 0,829038 gehört dem Winkel von 56° und dem Winkel von 124° an. Wenn man demnach als Resultat einer Rechnung den Sinus eines Winkels findet, so ist es noch zweifelhaft, ob der diesem Sinus entsprechende spitze oder stumpfe Winkel den Forderungen der Aufgabe entspricht. Manchmal leisten beide den Bedingungen der Aufgabe Genüge; solche Fälle werden wir später noch kennen lernen; manchmal auch nur einer. So haben wir gefunden, daß, wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse 15, die eine Kathete 4 ist, 0,266666 der Sinus des der Kathete von 4 gegenüberliegenden Winkels sei. Der Sinus 0,266666 gehört aber einem spitzen und einem stumpfen Winkel an, der stumpfe Winkel muß aber bei unserer Auflösung ganz ausgeschlossen bleiben, weil in einem rechtwinkeligen Dreiecke kein stumpfer Winkel vorkommen kann. Obgleich also dem Sinus 0,2666 ... auch ein stumpfer Winkel entspricht, so muß er hier doch unberücksichtigt bleiben, weil er den übrigen Bedingungen der Aufgabe nicht Genüge leistet.

Anders verhält es sich mit dem Cosinus stumpfer Winkel. Denken wir uns die Linie *CM*, Fig. 15, so geschwenkt, daß der Winkel *n* wächst, so nähert sich der Fußpunkt *G'* des Perpendikels *F'G'* dem Scheitel *C*, d. h. mit wachsendem Winkel nimmt der Cosinus ab, um 0 zu werden, wenn *n* bis auf 90° gewachsen ist. Wird aber der beweglich gedachte Schenkel noch über 90° hinaus, etwa bis *CA*, geschwenkt, so geht der Fußpunkt des als Sinus bezeichneten Perpendikels auf die andere Seite von *C* über, der Cosinus *GC* des stumpfen Winkels a hat also die entgegengesetzte Lage des von demselben Schenkel *CB* an gezählten spitzen Winkels *n*; während der Cosinus des spitzen Winkels *n* von *C* nach der rechten Seite hin gezählt wird, erstreckt sich der Cosinus des stumpfen Winkels a von *C* nach der linken. Bezeichnet man eine von *C* nach rechts gemessene Länge als positiv, so müssen wir eine von *C* nach links gemessene als negativ bezeichnen; der Cosinus eines stumpfen Winkels ist also negativ.

Der Größe nach ist, wie leicht einzusehen, der Cosinus des stumpfen Winkels a gleich dem Cosinus seines spitzen Nebenwinkels b; es ist also

$$cos.\,a = -\,cos.\,(180^\circ - a).$$

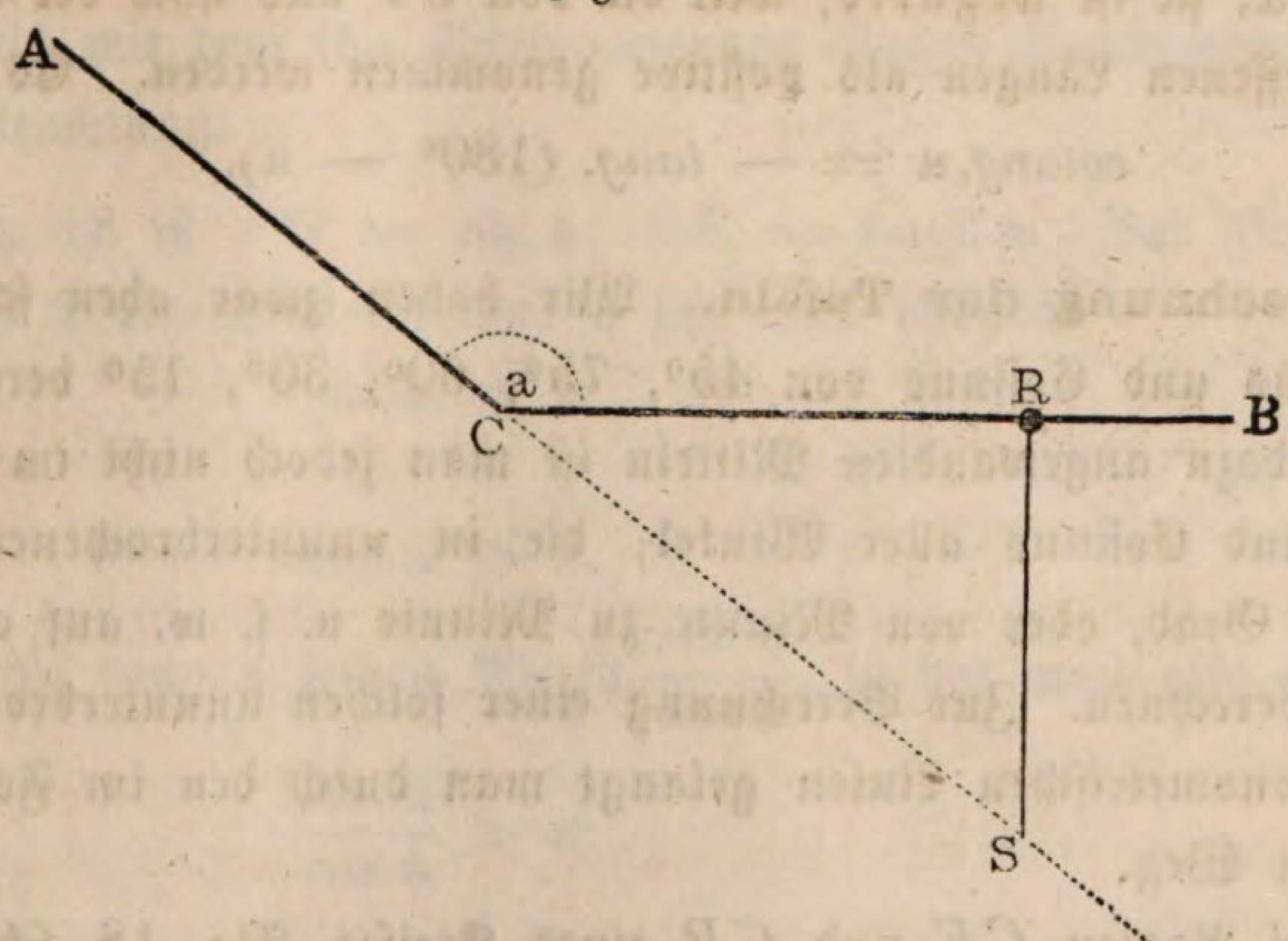
So ist z. B. $cos.\,142^\circ = -\,cos.\,38$; $cos.\,120 = -\,cos.\,60$ u. s. w.

Da

$$tang.\,a = \frac{sin.\,a}{cos.\,a},$$

so ist die Tangente eines stumpfen Winkels negativ, indem für $a > 90^\circ$ $cos.\,a$ negativ wird, während $sin.\,a$ positiv bleibt.

Fig. 16.



Es läßt sich dies auch durch Construction nachweisen. Es sei, Fig. 16,

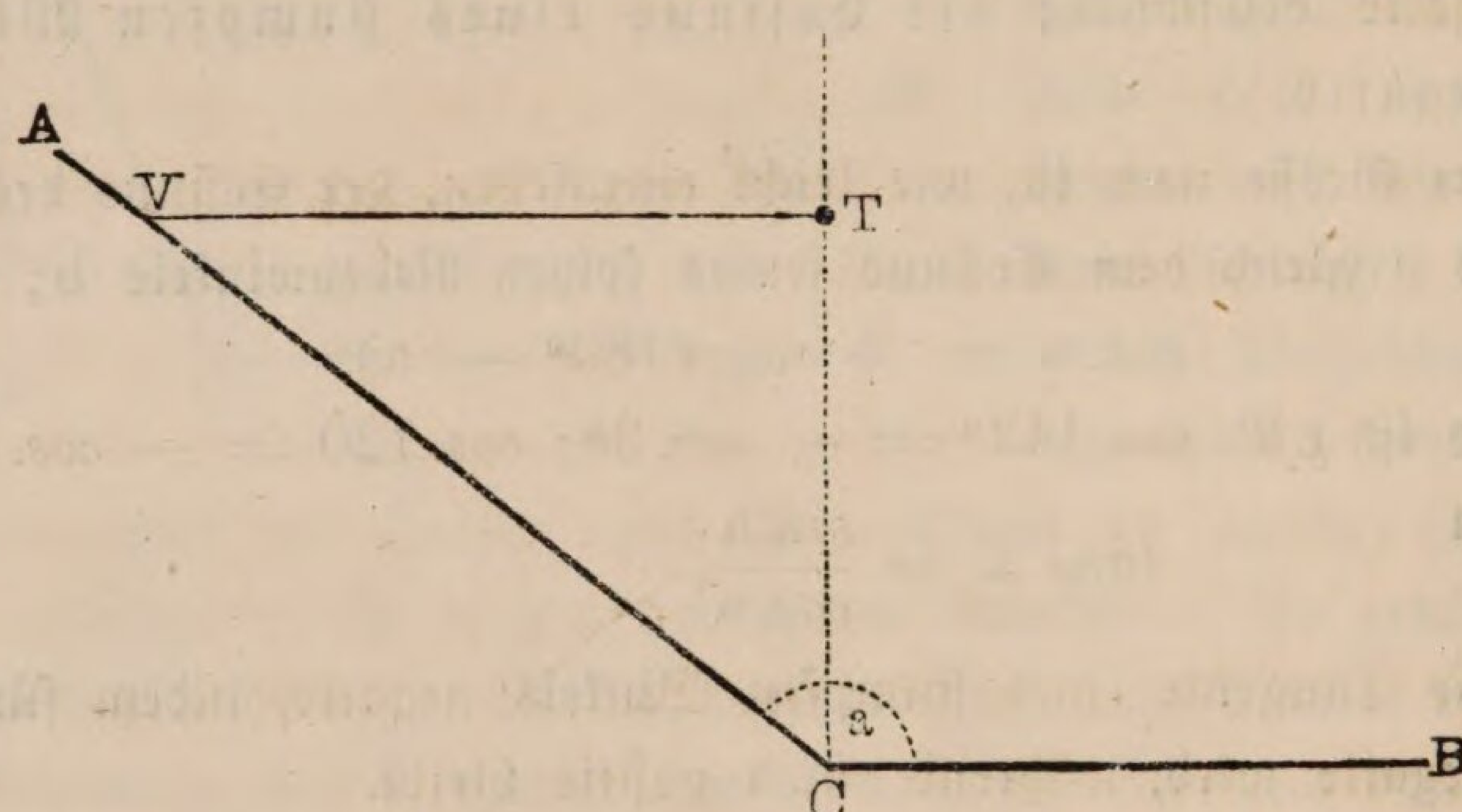
BCA der stumpfe Winkel a, dessen Tangente man construiren soll. Macht man, wie bei der in §. 12 angegebenen Construction, $CR = 1$, so wird ein in R nach oben errichtetes Perpendikel den andern Schenkel CA des Winkels a gar nicht treffen, während ein nach abwärts gezogenes Perpendikel die Verlängerung des Schenkels AC in S trifft. RS ist die Tangente des stumpfen Winkels a, sie ist negativ, weil sie von C nach unten gerichtet ist.

Der Größe nach ist die Tangente eines stumpfen Winkels a gleich der Tangente seines spitzen Nebenwinkels b, also

$$tang.\, a = -\, tang.\, (180^0 - a).$$

Machen wir in Fig. 17 $CT = 1$, so ist die rechtwinkelig zu CT von T nach links gezogene Linie TV die Cotangente des stumpfen

Fig. 17.



Winkels a; sie ist negativ, weil die von CT aus nach der rechten Seite hin gemessenen Längen als positive genommen werden. Es ist also

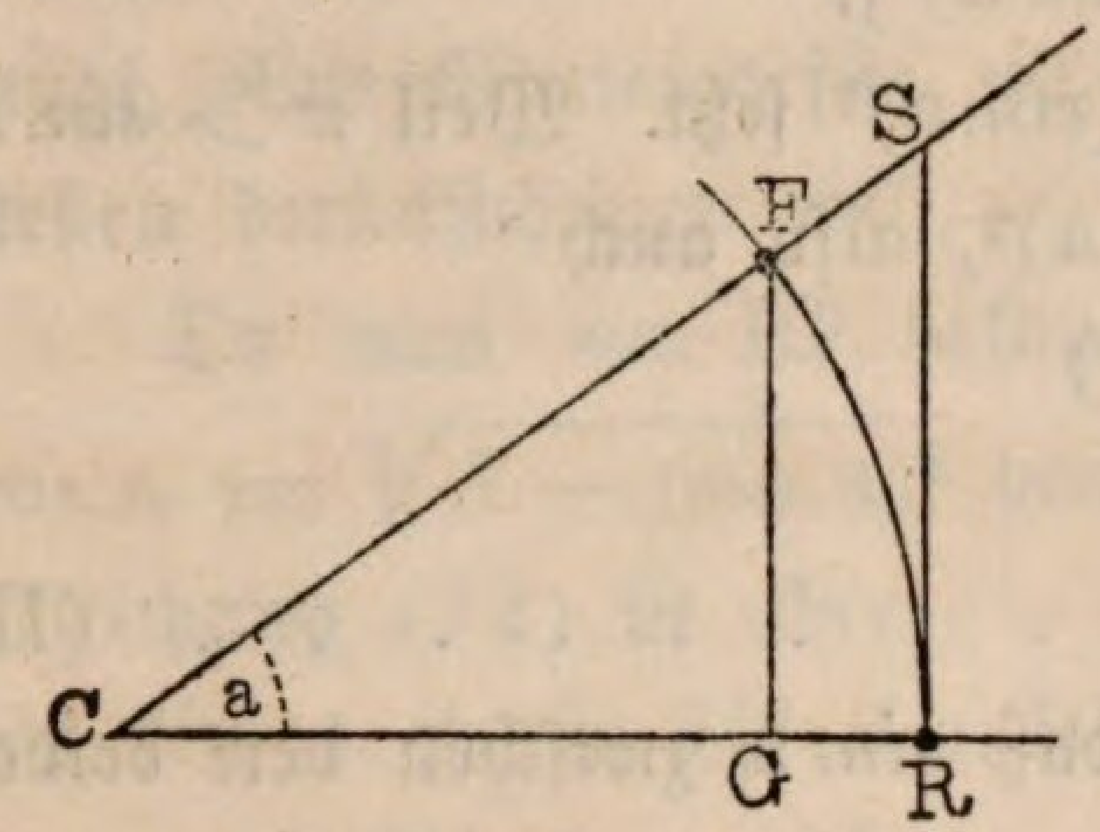
$$cotang.\, a = -\, tang.\, (180^0 - a).$$

20 **Berechnung der Tafeln.** Wir haben zwar oben schon gesehen, wie Sinus und Cosinus von 45°, 75°, 60°, 30°, 15° berechnet wird; mit den dazu angewandten Mitteln ist man jedoch nicht im Stande, die Sinus und Cosinus aller Winkel, die in ununterbrochener Reihe von Grad zu Grad, oder von Minute zu Minute u. s. w. auf einander folgen, zu berechnen. Zur Berechnung einer solchen ununterbrochenen Reihe von trigonometrischen Linien gelangt man durch den im Folgenden angegebenen Weg.

Zwei Radien CF und CR eines Kreises, Fig. 18, schließen einen Bogen $FR = x$ ein, welcher sich zur Peripherie des ganzen Kreises

verhält, wie der Winkel a, den die beiden Radien mit einander machen, zu 360°. Wenn der Radius des Kreises = 1 ist, wie bei der ganzen

Fig. 18.



folgenden Betrachtung stets angenommen werden soll, so hat man also die Proportion

$$x : 2\pi = a : 360^0$$

oder

$$x : \pi = a : 180^0.$$

Nach dieser Proportion ist es nun leicht, einen Bogen x zu berechnen, welcher einen gegebenen Winkel überspannt. Es soll z. B. der Bogen berechnet werden, welcher einen Winkel von 1° überspannt, so hat man

$$x : 3{,}141592 = 1 : 180$$

und daraus

$$x = 0{,}017453.$$

Der Bogen, welcher einen Winkel von 10′ überspannt, ist der sechste Theil des eben gefundenen, also

$$x = 0{,}00290888.$$

Nun aber sieht man leicht ein, daß der Sinus eines Winkels a stets kleiner sein muß, als der den Winkel a überspannende Bogen x, daß ferner *sin.* a um so weniger von x verschieden sein kann, je kleiner a ist. So ist z. B. *sin.* 1° nicht viel von dem den Winkel von 1° überspannenden Bogen verschieden, welcher, wie wir gesehen haben, 0,017453 ist. Um aber entscheiden zu können, auf wie viel Decimalstellen der Sinus eines Winkels mit dem ihn überspannenden Bogen übereinstimmt, dient folgende Betrachtung.

In Fig. 18 ist FG = *sin.* a, SR = *tang.* a. Der Bogen FR soll noch mit x bezeichnet werden, so hat man offenbar

$$sin.\, a < x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (I)$$

und

$$tang.\, a > x.$$

Setzen wir für *tang.* a seinen Werth $\frac{sin.\, a}{cos.\, a}$, so hat man also auch

$$\frac{sin.\, a}{cos.\, a} > x$$

und daraus

$$sin.\, a > x \,.\, cos.\, a$$

Weil aber $cos.\,a$ jedenfalls kleiner als 1 ist, so ist auch $(cos.\,a)^2 < cos.\,a$, demnach auch

$$sin.\,a > x\,.\,(cos.\,a)^2$$

oder

$$sin.\,a > x\,[1 - (sin.\,a)^2],$$

wenn man für $(cos.\,a)^2$ seinen Werth $1 - (sin.\,a)^2$ setzt. Weil $x > sin.\,a$, so ist auch $1 - x^2$ kleiner als $1 - (sin.\,a)^2$, also auch

$$sin.\,a > x\,(1 - x^2)$$

oder endlich

$$sin.\,a > x - x^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II)$$

Aus (I) und (II) ersieht man nun, daß $sin.\,a$ zwischen den beiden Gränzen x und $x - x^3$ liegt. Die Differenz dieser beiden Gränzen ist x^3, und diese Differenz wird um so kleiner, je kleiner x wird. Je kleiner also der Winkel a wird, um so näher liegen die beiden Gränzen zusammen, zwischen welchen $sin.\,a$ eingeschlossen ist. So liegt z. B. $sin.\,1^0$ zwischen den Gränzen 0,017453 und $0{,}017453 - 0{,}017453^3$ oder

$$sin.\,1^0 < 0{,}017453$$

und

$$sin.\,1^0 > 0{,}017453 - 0{,}00000536 > 0{,}01744764.$$

Die beiden Gränzen, zwischen denen $sin.\,1^0$ liegen muß, differiren erst auf der fünften Decimalstelle, wenn man also 0,017453 für den Sinus von 1^0 nimmt, so weiß man zwar, daß dieser Werth zu groß ist, man weiß aber auch, daß er höchstens auf der fünften Decimalstelle vom wahren Werth verschieden sein kann; wo also keine größere Genauigkeit nöthig ist, kann man bei diesem Werthe stehen bleiben.

Weit genauer können wir nach derselben Methode den Werth von $sin.\,10'$ ausmitteln. Der den Winkel von $10'$ überspannende Bogen ist 0,002909, mithin

$$sin.\,10' < 0{,}00290888$$
$$sin.\,10' > 0{,}00290888 - 0{,}0000000246$$

oder

$$sin.\,10' > 0{,}0029088654\,\ldots$$

Die beiden Gränzen, zwischen welchen $sin.\,10'$ liegt, sind, wie man sieht, nur um 0,0000000246 von einander verschieden; nimmt man also 0,00290888 für $sin.\,10'$, so kann man gewiß sein, daß dieser Werth nicht um Dreihundertmilliontheil fehlerhaft ist. Will man also $sin.\,10'$ nur auf sechs Decimalstellen genau haben, so ist er 0,002909. Diese Genauigkeit ist meistens genügend. Da der Sinus von $10'$ erst auf der

achten Decimalstelle von dem denselben Winkel überspannenden Bogen differirt, so werden auch der Sinus und der Bogen von 1′ noch auf mehr Decimalstellen übereinstimmen, und man kann daher den Bogen, welcher den Winkel von 1′ überspannt und dessen Länge 0,000291 beträgt, ohne Weiteres für *sin.* 1′ nehmen, wenn man nur sechs Decimalstellen berücksichtigen will.

Da nun *sin.* 10′ bekannt ist, so findet man nach der Gleichung $cos.\, a = \sqrt{1 - (sin.\, a)^2}$ den Werth von *cos.* 10′; er ist 0,999996. Nach Gleichung (12) ist aber

$$sin.\, 20' = 2\, .\, sin.\, 10'\, .\, cos.\, 10' = 2 \times 0{,}002909\, .\, 0{,}999996 = 0{,}005818$$

und nach Gleichung (14)

$$cos.\, 20' = 1 - 2\, (sin.\, 10')^2$$

$$cos.\, 20' = 1 - 2\, .\, 0{,}002909^2 = 0{,}999983.$$

Ferner ist

$$sin.\, 40' = 2\, .\, sin.\, 20'\, .\, cos.\, 20'$$

$$sin.\, 40' = 2\, .\, 0{,}005818 \times 0{,}999983$$

$$sin.\, 40' = 0{,}011635$$

und

$$cos.\, 40' = 1 - 2\, .\, (sin.\, 20')^2$$

$$cos.\, 40' = 1 - 2\, .\, 0{,}005818^2 = 0{,}999932.$$

Nach Gleichung (8) erhält man $sin.\, 60' = sin.\, 1^0$

$$sin.\, 1^0 = sin.\, 40'\, .\, cos.\, 20' + cos.\, 40'\, .\, sin.\, 20'$$

und nach Gleichung (9)

$$cos.\, 1^0 = cos.\, 40'\, .\, cos.\, 20' - sin.\, 40'\, .\, sin.\, 20'.$$

Substituirt man in diese beiden letzten Gleichungen für *sin.* 40′, *cos.* 40′, *sin.* 20′ und *cos.* 20′ ihre Werthe, so findet man

$$sin.\, 1^0 = 0{,}017452$$

$$cos.\, 1^0 = 0{,}999848.$$

Auf diesem Wege kann man die Sinus und Cosinus aller Winkel von 10′ zu 10′ berechnen. Hat man *sin.* 1′ berechnet, so kann man auf diesem Wege die Sinus und Cosinus aller Winkel von Minute zu Minute berechnen. Um auf diese Weise Tafeln zu berechnen, ist es übrigens durchaus nöthig, den kleinsten Sinus der Tafeln sowie alle folgenden auf mehr Decimalstellen genau zu berechnen, als man behalten will, um zu verhüten, daß die Fehler sich anhäufen und dadurch die letzten Ziffern fehlerhaft werden. Auch ist es nöthig, die gefundenen Werthe von Sinus und Cosinus dadurch zu controliren, daß man von

Sinus und Cosinus von 75°, 60°, 45°, 40°, 15°, die man auf anderem Wege berechnet hat (§. 5), ausgehend, die Sinus und Cosinus verschiedener Winkel berechnet, und die auf beiden Wegen erhaltenen Resultate vergleicht.

Zur Vervollständigung der Tafeln sind nur noch die Tangenten und Cotangenten zu berechnen. Nachdem die Sinus und Cosinus bekannt sind, ist diese Berechnung sehr einfach. Die Tangenten findet man mit Hülfe der Formel $tang.\, a = \frac{sin.\, a}{cos.\, a}$, die Cotangenten mit Hülfe der Formel $cotang.\, a = \frac{cos.\, a}{sin.\, a}$.

Das in diesem Abschnitt Gesagte soll nur dazu dienen, einen Weg zu zeigen, auf welchem man die Tafeln berechnen kann. Daß dieser Weg jedoch äußerst mühsam ist, wird wohl Jeder zugeben, der nur die Berechnung einiger Sinus und Cosinus versucht hat. Die Analysis liefert Mittel, welche weit rascher zu diesem Ziele führen.

Zweites Kapitel.

Anwendung der trigonometrischen Functionen zur Berechnung schiefwinkeliger Dreiecke.

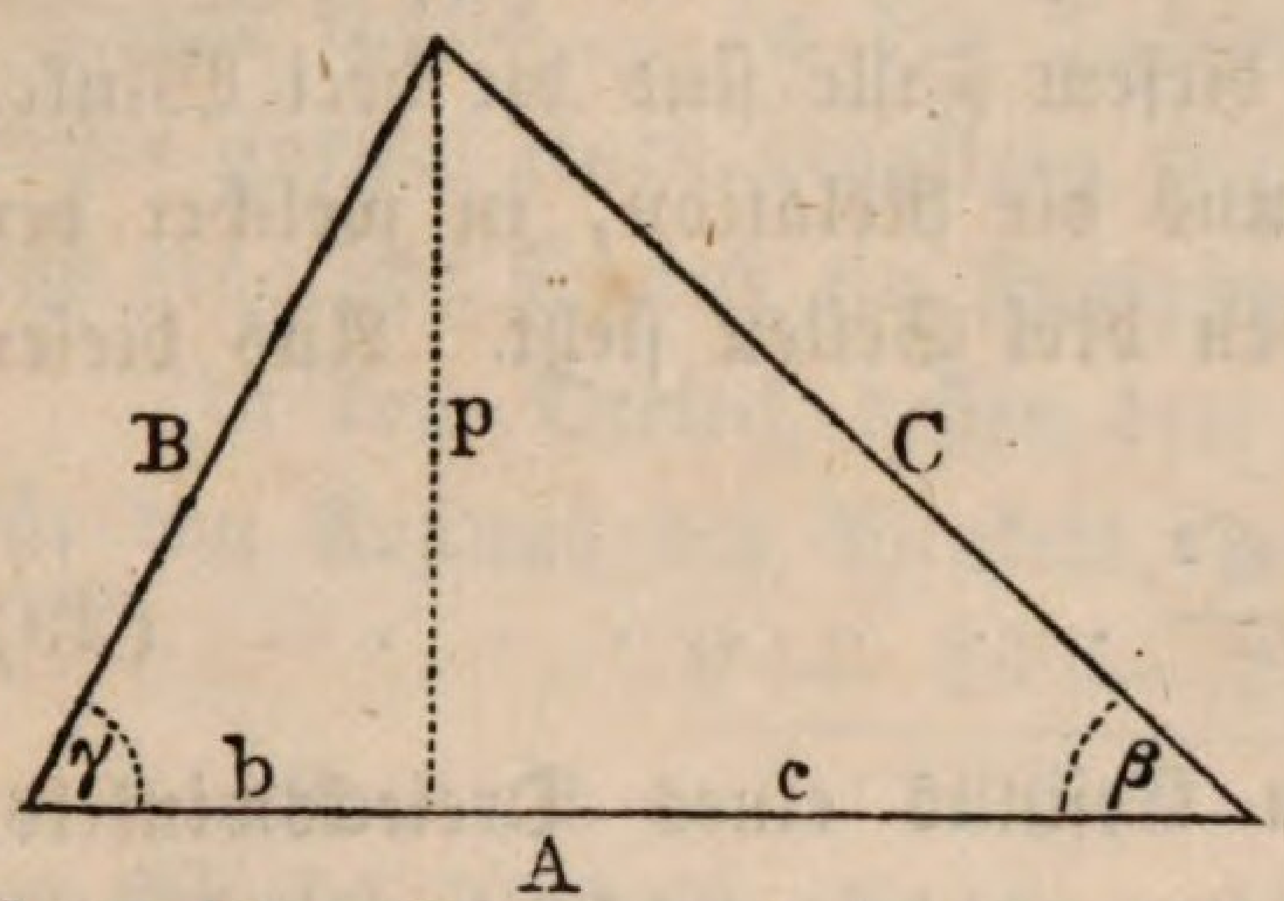
---

21 **Grundgleichungen des Dreiecks.** Wir haben bis jetzt die trigonometrischen Linien nur zur Berechnung der fehlenden Stücke rechtwinkeliger Dreiecke angewandt, sie dienen jedoch auch zur Berechnung der fehlenden Stücke in schiefwinkeligen Dreiecken. Diese Berechnung stützt sich stets auf eine der gleich zu entwickelnden Gleichungen, welche die Beziehungen ausdrücken, in welchen die verschiedenen Elemente eines Dreiecks zu einander stehen.

In Fig. 19 seien die drei Seiten des Dreiecks mit A, B und C bezeichnet, die ihnen gegenüberstehenden Winkel aber mit den entsprechenden Buchstaben des griechischen Alphabets. Von der Spitze des Winkels

α ist ein Perpendikel p auf die Seite A gefällt; dieses Perpendikel theilt die Linie A in zwei Theile b und c. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist nun

Fig. 19.



$$p^2 = B^2 - b^2,$$

aber auch

$$p^2 = C^2 - c^2,$$

mithin

$$C^2 - c^2 = B^2 - b^2,$$

also

$$C^2 = B^2 + c^2 - b^2.$$

Nun aber ist $c = A - b$, also $c^2 = A^2 - 2Ab + b^2$; substituirt man diesen Werth von c^2 in die letzte Gleichung, so kommt

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2Ab,$$

nun aber ist offenbar $b = B \cos.\gamma$, also

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos.\gamma \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

das heißt in Worten: In einem jeden Dreieck erhält man das Quadrat einer Seite, wenn man die Quadrate der beiden anderen Seiten addirt und von der Summe das doppelte Product der beiden anderen Seiten multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den sie einschließen, abzieht.

Die zweite Grundgleichung erhält man gleichfalls aus der Betrachtung der Fig. 19. Es ist nämlich

$$p = B \sin.\gamma,$$

aber auch

$$p = C . \sin \beta,$$

also

$$B \sin.\gamma = C . \sin.\beta;$$

aus dieser Gleichung aber folgt

$$\frac{B}{C} = \frac{\sin.\beta}{\sin.\gamma}$$

oder

$$B : C = \sin.\beta : \sin.\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

das heißt in Worten: Je zwei Seiten eines Dreiecks verhalten sich zu einander wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden Winkel.

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen (27) und (28) kann man stets, wenn drei Elemente eines Dreiecks gegeben sind, unter denen sich aber

wenigstens eine Seite befinden muß, die drei anderen Stücke des Dreiecks berechnen. Die verschiedenen hier möglichen Fälle wollen wir in derselben Ordnung wie in der Geometrie betrachten.

I. Gegeben: Drei Seiten. In diesem Falle sind die drei Winkel zu bestimmen. Gleichung (27) giebt uns die Relation, in welcher der Cosinus eines Winkels im Dreieck zu den drei Seiten steht. Aus dieser Gleichung folgt

$$cos.\,\gamma = \frac{A^2 + B^2 - C^2}{2\,AB} \quad \text{. . . . .} \quad (29)$$

das heißt in Worten: man findet den Cosinus eines Dreieckswinkels, wenn man die Quadrate der beiden Seiten addirt, welche den gesuchten Winkel einschließen, von der Summe das Quadrat der ihm gegenüberstehenden Seite abzieht, und die gefundene Differenz durch das doppelte Product der beiden den gesuchten Winkel einschließenden Seiten dividirt. Ganz analog ist also auch

$$cos.\,\alpha = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2\,B\,.\,C}$$

und

$$cos.\beta = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2\,A\,.\,C}.$$

Es seien z. B. die drei Seiten eines Dreiecks 6′, 7′ und 8′, so ist der Cosinus des Winkels, welcher der Seite von 6′ gegenübersteht,

$$\frac{7^2 + 8^2 - 6^2}{2\,.\,7\,.\,8} = \frac{77}{112} = 0{,}687500.$$

Der diesem Cosinus angehörige Winkel ist 46° 34,1′.

Der Cosinus des Winkels, welcher der Seite von 7′ gegenübersteht, ist

$$\frac{8^2 + 6^2 - 7^2}{2\,.\,6\,.\,8} = \frac{51}{96} = 0{,}53124,$$

der dazu gehörige Winkel 57° 54,6′.

Der Cosinus des dritten Winkels ist

$$\frac{7^2 + 6^2 - 8^2}{2\,.\,7\,.\,6} = \frac{21}{54} = 0{,}25,$$

wonach der dritte Winkel selbst 75° 31,3′.

Berechnet man auf diese Weise die drei Winkel des Dreiecks, dessen Seiten 3′, 4′ und 6′ sind, so findet man für den Cosinus des Winkels, welcher der Seite von 6′ gegenüberliegt,

$$\frac{16 + 9 - 36}{24} = -\frac{11}{24} = -\,0{,}458\,\ldots$$

Weil der Cosinus dieses Winkels negativ ist, so ist der Winkel selbst ein stumpfer, und zwar ist er der Nebenwinkel von dem, den man für den Cosinus 0,458 ... in den Tafeln findet. So oft man überhaupt nach dieser Formel einen negativen Cosinus findet, so ersieht man daraus, daß das fragliche Dreieck ein stumpfwinkeliges ist.

In dem Dreieck, dessen drei Seiten 3′, 4′ und 5′ sind, findet man für den Cosinus des Winkels, welcher der Seite von 5′ gegenübersteht,

$$\frac{9 + 16 - 25}{24} = 0,$$

der Winkel selbst ist also ein rechter.

Es seien 3′, 4′ und 8′ die drei Seiten eines Dreiecks, so ergiebt sich für den Cosinus des Winkels, welcher der Seite von 3′ gegenübersteht,

$$\frac{64 + 16 - 9}{64} = {}^{71}/_{64} = 1{,}1 \ldots,$$

d. h. ein Werth, welcher größer ist als 1; da aber kein Cosinus größer als 1 sein kann, so gehört der gefundene Cosinus einem unmöglichen Winkel an, oder mit anderen Worten: mit den drei Seiten 3′, 4′ und 8′ kann gar kein Dreieck gebildet werden. Daß dem so sei, kann man auch daraus schon erkennen, daß die Seite 8′ größer ist als die beiden anderen zusammengenommen.

Wie groß sind die drei Winkel in folgenden Dreiecken?

A	*B*	*C*
127′	94′	156′
93′	84′	72′
87′	112′	68′

II. Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. Es sei gegeben der Winkel γ und die beiden Seiten A und B, welche diesen Winkel bilden, so giebt uns Gleichung (27) unmittelbar das Quadrat der dritten Seite, nämlich

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos.\gamma.$$

Es sei z. B. $A = 3'$, $B = 4'$, $\gamma = 58^0$, so ist

$$C^2 = 9 + 16 - 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, \cos.58^0 = 12{,}282; \; C = 3{,}5 \ldots.$$

Nachdem nun die drei Seiten bekannt sind, kann man nach dem im

vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren auch noch die beiden fehlenden Winkel suchen.

So lange γ ein spitzer Winkel ist, bleibt $\cos.\gamma$ positiv und das letzte Glied im Werth von C^2 negativ. In einem spitzwinkeligen Dreieck ist demnach das Quadrat jeder Seite kleiner, als die Quadrate der beiden anderen zusammengenommen; ist γ ein rechter Winkel, so ist $\cos.\gamma = 0$, und der Werth von C^2 reducirt sich auf $A^2 + B^2$, was wir schon durch den Pythagoräischen Lehrsatz wußten. Sobald γ ein stumpfer Winkel ist, wird $\cos.\gamma$ negativ und dadurch das letzte Glied im Werthe von C^2 positiv. In einem stumpfwinkeligen Dreieck ist demnach das Quadrat der Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, größer als das Quadrat der beiden anderen Seiten zusammengenommen.

Es sei z. B. $A = 7'$, $B = 4'$, $\gamma = 124^0$, so ist

$$C^2 = 49 + 16 - 2 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, \cos. 124^0$$

$$C^2 = 49 + 16 + 2 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, \cos. 56^0 = 65 + 56 \,.\, 0{,}559193.$$

Den übrigen Theil der Rechnung mag der Schüler ausführen.

Wenn in einem Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, so kann man, wie schon bemerkt wurde, die fehlenden Winkel dadurch finden, daß man zuerst mit Hülfe der Gleichung (27) die fehlende Seite berechnet, und wenn der numerische Werth derselben bekannt ist, mit Hülfe der Gleichung (29) die fehlenden Winkel bestimmt. Dieser Weg ist aber etwas umständlich, und deshalb ist es wünschenswerth, eine Formel zu haben, nach welcher man direct die fehlenden Winkel bestimmen kann, ohne zuerst die fehlende Seite zu suchen. Zu einer solchen Formel kommen wir durch folgende Betrachtung. Es ist bekanntlich

$$A : \sin.\alpha = B : \sin.\beta.$$

Wenn nun die Seiten A und B nebst dem Winkel γ bekannt sind, so sind in dieser Gleichung zwei unbekannte Größen, es läßt sich also aus dieser Gleichung allein weder α noch β bestimmen. Nun ist aber $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ oder $\alpha = 180^0 - \beta - \gamma$; also $\sin.\alpha = \sin.(\beta + \gamma)$ $\sin.\alpha = \sin.\beta \cos.\gamma + \cos.\beta \sin.\gamma$; substituirt man diesen Werth in obige Gleichung, so kommt

$$A . \sin.\beta = B (\sin.\beta \,.\, \cos.\gamma + \cos.\beta \sin.\gamma).$$

In dieser Gleichung ist nur noch der Winkel β unbekannt. Dividirt man auf beiden Seiten mit $\cos.\beta$, so kommt

$$A \,.\, \text{tang}.\beta = B \,\text{tang}.\beta \cos.\gamma + B \,.\, \sin.\gamma$$

und daraus

$$tang.\,\beta = \frac{B\,.\,sin.\,\gamma}{A - B\,.\,cos.\,\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

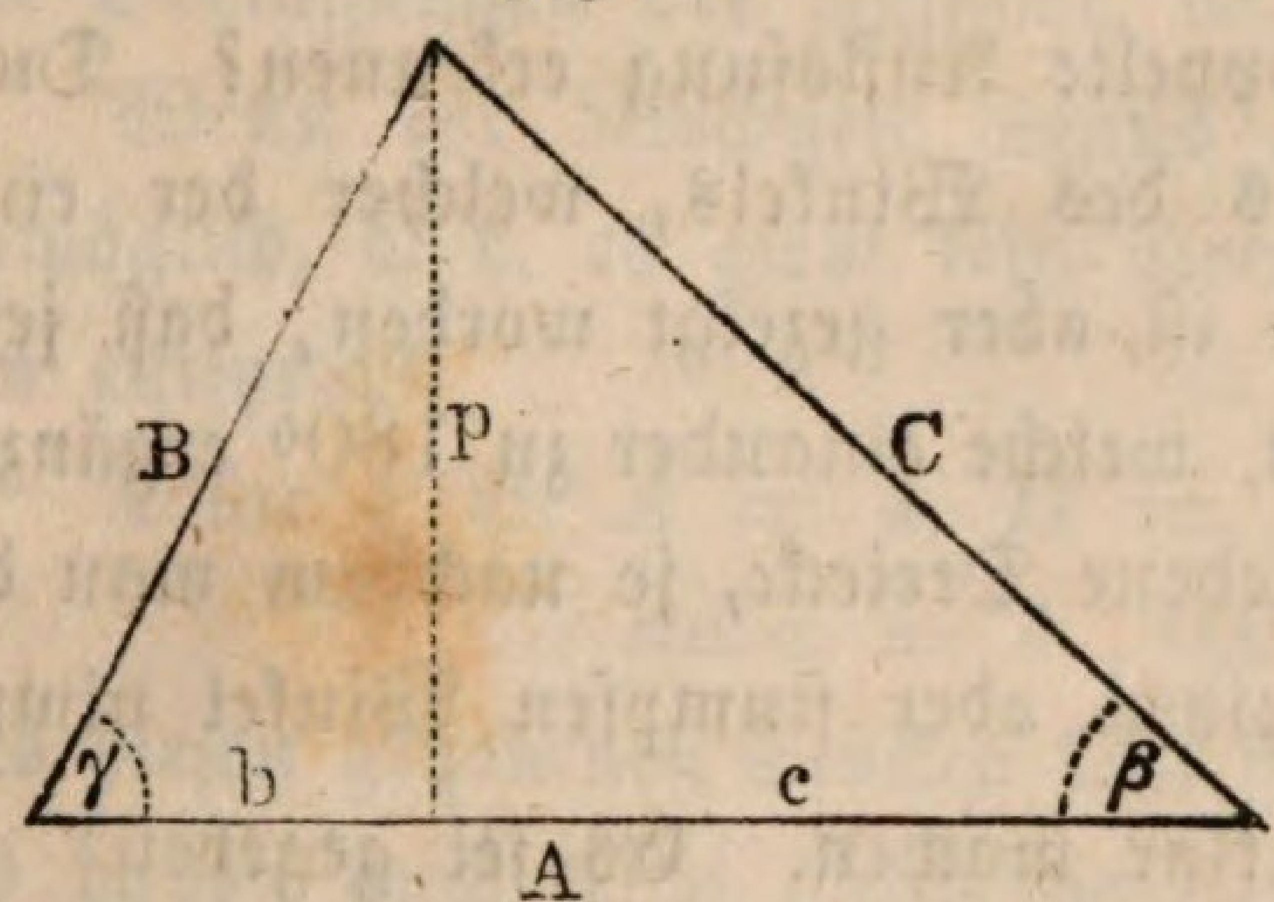
Dieser Gleichung ganz analog ist

$$tang.\,\alpha = \frac{A\,.\,sin.\,\gamma}{B - A\,.\,cos.\,\gamma}.$$

Man hätte die Formel (30) auch direct aus der Figur ableiten können. In Fig. 19 ist nach Gleichung (25)

$$tang.\,\beta = \frac{p}{c} = \frac{p}{A - b}.$$

Fig. 19.



Es ist aber $p = B\,.\,sin.\,\gamma$, $b = B\,cos.\,\gamma$; substituirt man diese Werthe in den letzten Werth von $tang.\,\beta$, so findet man für $tang.\,\beta$ denselben Werth wie in Gleichung (30).

Es sei z. B.

$$A = 4', B = 6', \gamma = 42^0,$$

so ist

$$tang.\,\beta = \frac{6 \times 0{,}669131}{4 - 6 \times 0{,}743145} = \frac{4{,}014786}{-0{,}458870} = -8{,}749333$$

$$\beta = 96^0\,31'.$$

Wie groß ist α, β und C in folgenden Dreiecken?

A	B	γ
3728′	1942′	83⁰
763′	1024′	112⁰
0,57ᵐ	0,96ᵐ	58⁰

III. **Gegeben zwei Seiten und ein Winkel, welcher der einen von beiden Seiten gegenübersteht.** Es sei gegeben der Winkel β und die Seiten A und B, so hat man zur Berechnung des Winkels α

$$B : A = sin.\,\beta : sin.\,\alpha,$$

also ist

$$sin.\,\alpha = \frac{A\,.\,sin.\,\beta}{B}.$$

Ist z. B. $A = 6'$, $B = 7'$, $\beta = 49^0$, so ist

$$sin. \alpha = \frac{6 \times 0{,}754710}{7} = 0{,}646894$$

$$\alpha = 40^0 18'.$$

Aus der Geometrie (S. 19) ist bereits bekannt, daß ein Dreieck durch zwei Seiten und einen Winkel, welcher der einen der beiden Seiten gegenübersteht, nur dann bestimmt ist, wenn der Winkel der längeren Seite gegenüberliegt. Liegt der gegebene Winkel der kürzeren der gegebenen Seiten gegenüber, so kann man aus diesen Stücken entweder kein Dreieck construiren, oder zwei verschiedene. Wie aber können wir aus unserer Rechnung eine solche doppelte Auflösung erkennen? Durch die Rechnung findet man den Sinus des Winkels, welcher der einen gegebenen Seite gegenübersteht; oben ist aber gezeigt worden, daß jeder Sinus zugleich zwei Winkeln angehört, welche einander zu 180° ergänzen, und man erhält demnach zwei verschiedene Dreiecke, je nachdem man den zum berechneten Sinus gehörigen spitzen oder stumpfen Winkel nimmt.

Ein Beispiel mag das Gesagte klar machen. Es sei gegeben $A = 1''$, $B = 0{,}65''$, $\beta = 31^0$, so ist

$$sin. \alpha = \frac{1}{0{,}65} \cdot 0{,}515038 = 0{,}792366.$$

Der Sinus 0,792366 gehört aber gleichzeitig einem Winkel von $52^0 25'$ und seinem Nebenwinkel $127^0 35'$ an. Der der Seite A gegenüberstehende Winkel kann also entweder $52^0 25'$ oder $127^0 35'$ sein.

Da aber jeder Sinus zugleich einem spitzen und einem stumpfen Winkel angehört, so sollte man glauben, daß die trigonometrische Rechnung stets eine doppelte Auflösung gäbe, was den geometrischen Betrachtungen widerspricht. Der zum gefundenen Sinus gehörige stumpfe Winkel kann jedoch nur dann eine zweite Auflösung geben, wenn er mit dem gegebenen Winkel wirklich in einem Dreieck vorkommen kann, d. h. wenn er mit dem gegebenen zusammengenommen weniger als 180° ausmacht. Es ist dies aber nur dann der Fall, wenn der gegebene Winkel kleiner ist als der Nebenwinkel des berechneten stumpfen, d. h. wenn der berechnete spitze Winkel α größer ist als der gegebene Winkel β. Zwei Auflösungen sind also nur dann möglich, wenn $sin. \alpha > sin. \beta$; da aber $sin. \alpha = \frac{A}{B} . sin. \beta$, so sind also nur dann zwei Lösungen möglich,

wenn der Factor $\frac{A}{B} > 1$, d. h. wenn $A > B$, oder in Worten, wenn der gegebene Winkel der kleineren der gegebenen Seiten gegenüberliegt.

Im obigen Beispiel war gegeben $A = 6$, $B = 7$, $\beta = 49^0$, daraus ergab sich $sin. \alpha = 0{,}646894$. Von den beiden zu diesem Sinus gehörigen Winkeln $40^0\,18'$ und $139^0\,42'$ kann aber der letztere gar nicht in Betracht kommen, weil er mit den gegebenen 49^0 mehr als 180^0 beträgt, weil also die beiden Winkel von $139^0\,42'$ und 49^0 gar nicht in einem und demselben Dreieck vorkommen können. In diesem Falle entspricht nur der zum berechneten Sinus gehörige spitze Winkel von $40^0\,18'$ den Bedingungen der Aufgabe, es ist also nur eine Aufgabe möglich.

Wenn der berechnete Sinus größer als 1 ist, so ist die Auflösung unmöglich, d. h. es giebt kein Dreieck, welches den gegebenen Bedingungen entspricht.

Wäre z. B. $A = 4$, $B = 1$, $\beta = 41^0$, so fände man

$$sin. \alpha = 4 \,.\, 0{,}656 \,..\, = 2{,}624;$$

aus diesen gegebenen Stücken läßt sich kein Dreieck construiren. Man kann sich davon auch leicht durch die Zeichnung überzeugen.

Wenn α berechnet ist, ist nichts leichter als γ zu finden; die fehlende Seite C ist sodann leicht nach Formel (27) zu berechnen. Man kann jedoch auch die dritte Seite C finden, ohne vorher erst die numerischen Werthe von α und γ bestimmt zu haben. Die dazu nöthige Formel soll sogleich entwickelt werden.

Nach den oben entwickelten Gleichungen ist

$$C = \frac{A \,.\, sin. \gamma}{sin. \alpha}.$$

In diesem Werth von C kommen aber noch zwei unbekannte Größen vor, die eliminirt werden müssen. Weil $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta$, so ist $sin. \gamma = sin. (\beta + \alpha)$, mithin

$$C = \frac{A \,.\, sin. (\alpha + \beta)}{sin. \alpha}$$

oder

$$C = \frac{A \,.\, sin. \alpha \, cos. \beta + A \, sin. \beta \,.\, cos. \alpha}{sin. \alpha} = A \,.\, cos. \beta + A \,.\, sin. \beta \, \frac{cos. \alpha}{sin. \alpha}.$$

In diesem Werth von C kommt nur noch eine unbekannte Größe α vor. Setzt man für $sin. \alpha$ seinen oben gefundenen Werth $\frac{A \,.\, sin. \beta}{B}$, so kommt

$$C = A \,.\, cos. \beta + B \,.\, cos. \alpha$$

und daraus

$$C = A\,.\,cos.\beta \pm B\,.\,\sqrt{(1 - sin.\alpha)^2},$$

und wenn man für $(sin.\alpha)^2$ wieder seinen Werth $\frac{A^2}{B^2}(sin.\beta)^2$ setzt,

$$C = A\,.\,cos.\beta \pm \sqrt{B^2 - A^2\,(sin.\beta)^2} \quad . \quad . \quad (31)$$

Dieser Werth von C zeigt schon eine doppelte Auflösung an, indem man zwei verschiedene Werthe von C erhält, je nachdem man die Wurzel positiv oder negativ nimmt.

Nehmen wir z. B. $A = 5^{cm}$, $B = 3^{cm}$, $\beta = 31^0$. Für dieses Dreieck findet man

$$C = 5\,.\,0{,}857 \pm \sqrt{9 - 25\,.\,0{,}265}$$

$$C = 4{,}285 \pm 1{,}540$$

$$C = 5{,}825 \; (RT, \text{ Fig. } 20)$$

oder

$$C = 2{,}745 \; (RT', \text{ Fig. } 21).$$

Um die Sache recht klar zu machen, ist es gut, die geometrische Bedeutung der einzelnen Theile des Werthes von C aufzusuchen. $A\,.\,cos.\beta$ ist die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, welche mit dessen Hypotenuse A einen Winkel β einschließt. Denken wir uns von S (Fig. 20 und Fig. 21) ein Perpendikel auf B gefällt und den Fußpunkt desselben mit O bezeichnet, so ist $RO = A\,.\,cos.\beta$, wenn RS mit A bezeichnet ist. Der zweite Theil des Werthes von C, nämlich

Fig. 20.

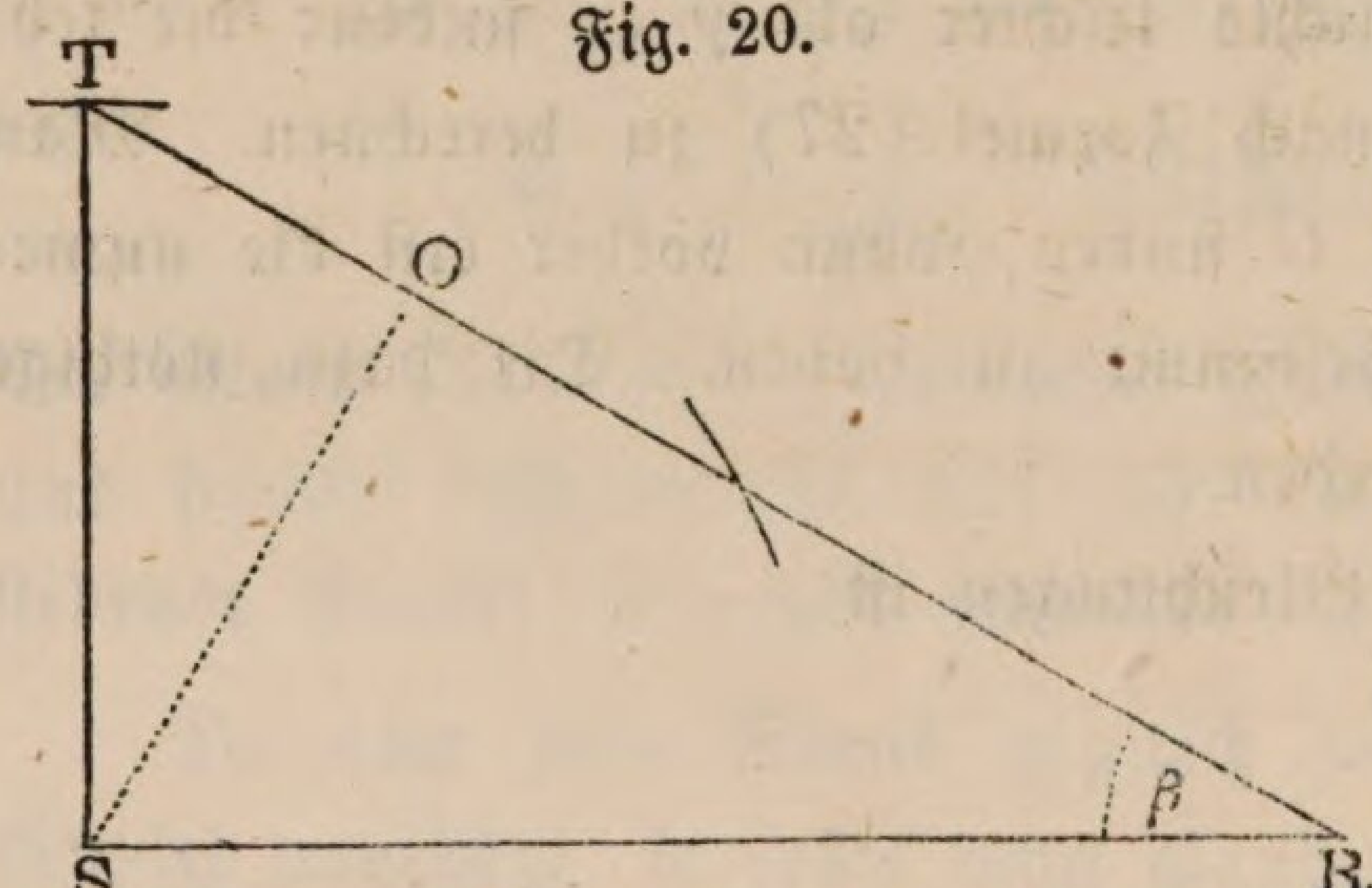
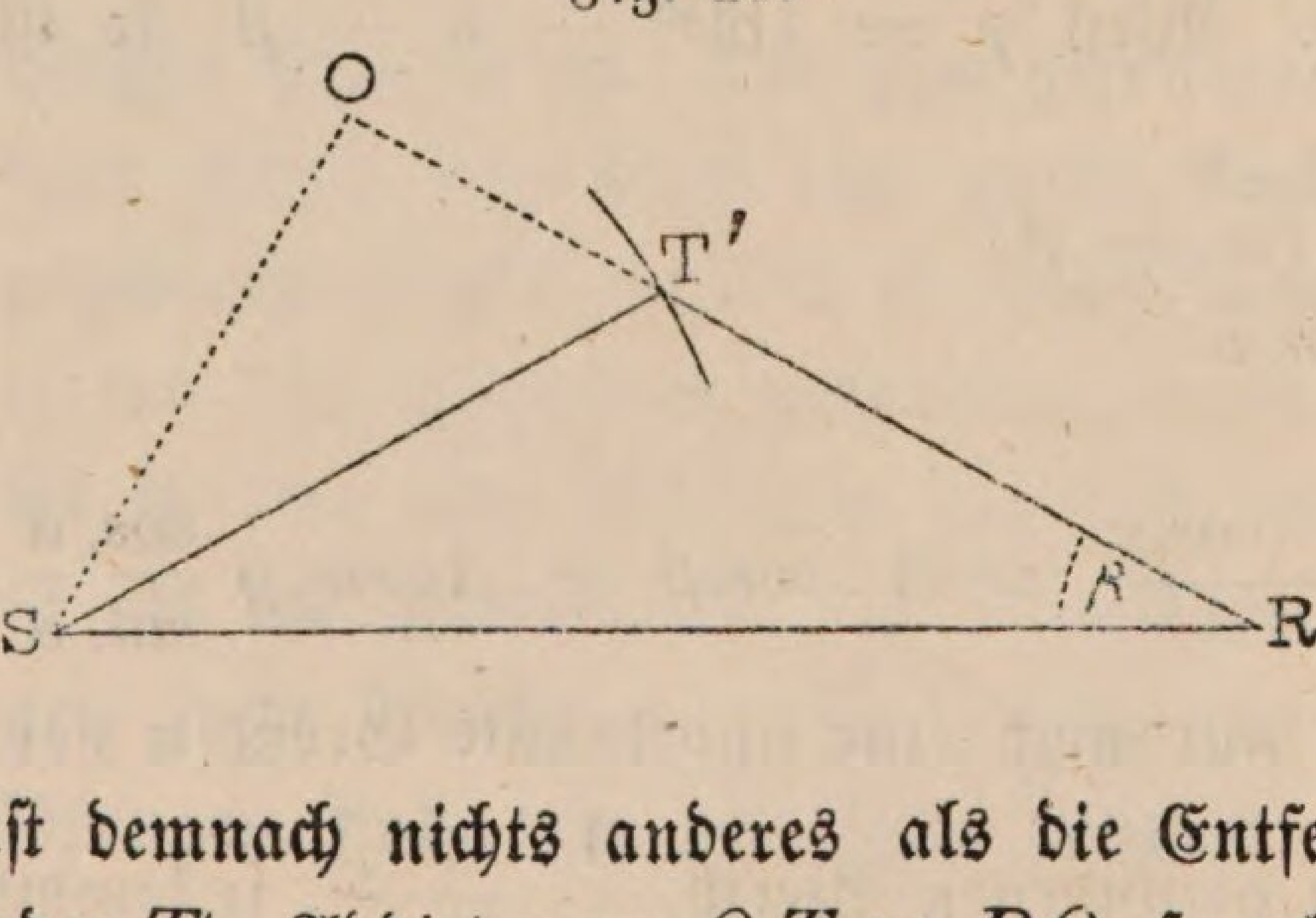


Fig. 21.



$$\sqrt{B^2 - A^2\,.\,(sin.\beta)^2},$$

stellt die eine Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks dar, dessen Hypotenuse B (ST, Fig. 20, oder ST', Fig. 21) und dessen eine Kathete $A\,.\,sin.\beta$ ist. $A\,.\,sin.\beta$ ist aber das Perpendikel SO selbst.

$$\sqrt{B^2 - A^2\,(sin.\beta)^2}$$

ist demnach nichts anderes als die Entfernung des Fußpunktes O von T oder T'. Addirt man OT zu RO, so erhält man C der einen, zieht man diese Länge von RO ab, so erhält man C der zweiten Auflösung. Aus

dieser Betrachtung folgt auch, daß nur dann eine zweite Auflösung möglich ist, wenn $RO > TO$, also wenn $A\ cos.\beta > \sqrt{B^2 - A^2\ (sin.\beta)^2}$ oder wenn $A^2\ (cos.\beta)^2 > B^2 - A^2\ (sin.\beta)^2$; bringt man in dieser Gleichung $A^2\ (sin.\beta)^2$ auf die andere Seite, so kommt $A^2\ (cos.\beta)^2 + A^2\ (sin.\beta)^2 > B^2$ oder $A^2 > B^2$; wir finden also hier für die Möglichkeit zweier Auflösungen dieselbe Bedingung wie früher. Wenn der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck negativ wird, wenn also $B^2 < A^2\ (sin.\beta)^2$, d. h. wenn die gegebene Seite B kleiner ist als das von S auf B gefällte Perpendikel, so wird der Werth von C imaginär, die Auflösung ist unmöglich.

Wie groß sind die nicht gegebenen Stücke in folgenden Dreiecken?

A	B	β
12′	8′	36°
9′	10′	112°
19′	16′	104°

IV. **Gegeben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.** Es sei gegeben die Seite A mit den Winkeln β und γ. Um α zu finden hat man nur $\beta + \gamma$ von 180° abzuziehen. Ist aber erst α bekannt, so findet man die Seiten B und C nach Gleichung (28), nämlich:

$$C = \frac{A\ .\ sin.\gamma}{sin.\alpha}$$

und

$$B = \frac{A\ .\ sin.\beta}{sin.\alpha}.$$

Es sei $A = 7$, $\gamma = 36^0$, $\beta = 74^0$, so ist $\alpha = 70^0$ und

$$C = \frac{7\ .\ sin.36^0}{sin.70}$$

$$B = \frac{7\ .\ sin.74^0}{sin.70^0}.$$

Wie groß sind die fehlenden Stücke in folgenden Dreiecken?

A	B	γ
64′	82′	42°
116′	98′	39°
8′	43′	111°

V. Gegeben zwei Seiten, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel.

Da zwei Winkel bekannt sind, so kann man leicht den dritten finden, und dann die fehlenden Seiten gerade ebenso berechnen, wie im vorigen Fall.

Wie groß sind die fehlenden Stücke in folgenden Dreiecken?

A	α	β
47′	61°	27°
63′	104°	42°
124′	54°	97°

22 **Anwendung der Logarithmen.** Weil die Anwendung der Logarithmen die trigonometrischen Rechnungen außerordentlich erleichtert, so hat man Tafeln entworfen, welche nicht die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten der Winkel selbst, sondern ihre Logarithmen enthalten.

Sämmtliche Sinus und Cosinus sind kleiner als 1, die Logarithmen aller Sinus und Cosinus müssen deshalb negative Kennziffern haben. So ist z. B. *sin.* 20° = 0,342020, und der Logarithme dieser Zahl also *log. sin.* 20° = 0,534052 — 1. Auf diese Weise, d. h. mit negativen Kennziffern, finden sich aber die Logarithmen der trigonometrischen Linien nicht in den meisten Tafeln. Um die negative Kennziffer zu vermeiden, ist in den Tafeln die wahre Kennziffer um 10 vermehrt, so daß die positive Kennziffer 9 statt der negativen 1 in den Tafeln steht. So findet man also *log. sin.* 20° = 9,534052. Es findet sich ferner in den Tafeln *log. cos.* 85° = 8,940296; der wahre Logarithme von *cos.* 85° hat aber eine um 10 kleinere Kennziffer, er ist also 0,940296 — 2.

Eben so sind auch in den Tafeln die Logarithmen der Tangenten und Cotangenten um 10 vergrößert. Wenn also für *log. tang.* 85° in den Tafeln steht 11,058048, so ist der wahre Logarithme von *tang.* 85° gleich 1,058048. In den Tafeln steht *log. cotang.* 77° = 9,988724, der wahre Logarithme von *cotang.* 77° ist also 0,988724 — 1.

Gewöhnlich enthalten die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln die Logarithmen der trigonometrischen Linien von Minute zu Minute. Nun

kann man aber ohne merklichen Fehler annehmen, daß zwischen je zwei auf einander folgenden Minuten der Wachsthum der Logarithmen dem Wachsthum des Winkels proportional ist. So ist z. B. *log. sin.* $37^0 24'$ $= 9{,}7834575$ und *log. sin.* $37^0 25' = 9{,}7836227$; während der Winkel um 1 Minute $= 60''$ wächst, nimmt der Logarithme des Sinus um 0,0001652 zu; nimmt der Winkel von $37^0 24'$ nur um $1''$ zu, so wächst der Logarithme des Sinus um $^1/_{60}$ von 0,0001652, d. h. um 0,0000002753; um also *log. sin.* $37^0 41' 1''$ zu finden, hat man nur zum *log. sin.* $37^0 24'$ die in den Tafeln stehende Differenz für $1''$, nämlich 27 . 53 so zu addiren, daß die Zahl 7 zur letzten, 2 zur vorletzten Decimalstelle des Logarithmus von *sin.* $37^0 24'$ addirt wird. Die Ziffern 53 kommen dann respective auf die achte und neunte Decimalstelle. Demnach ist *log.* $37^0 24' 1'' = 9{,}783460253$ oder, wenn man nur 7 Decimalstellen berücksichtigt, 9,7835602. Ist *log. sin.* $37^0 23' 43''$ zu bestimmen, so hat man zu *log. sin.* $37^0 24'$ die 43fache Differenz für $1''$, also $43 \times 27{,}53 = 1183{,}79$ so zu addiren, daß 3 zur siebenten, 8 zur sechsten Decimalstelle addirt wird u. s. w. Man findet auf diese Weise *log.* $37^0 24' 43'' = 9{,}783575879$ oder, wenn nur 7 Decimalstellen berücksichtigt werden sollen, 9,7835759.

Zur besseren Einübung folgt hier noch die Ausführung einiger anderen Beispiele.

Es sei zu bestimmen *log. tang.* $68^0 18' 32''$. In den Tafeln steht

$$log.\,tang.\ 68^0 18' = 10{,}4001733.$$

Die Differenz für $1'' = 61{,}27$, also für $32''$, ist $32 \times 61{,}27$ $= 1950{,}64$. Diese Differenz zu *log. tang.* $68^0 18'$ addirt, kommt

$$log.\,tang.\ 68^0 18' 32'' = 10{,}400368364$$

oder

$$10{,}4003684,$$

wenn man nur 7 Decimalen berücksichtigt.

Ferner sei zu bestimmen *log. cos.* $19^0 48' 27''$, in den Tafeln steht

$$log.\,cos.\ 19^0 48' = 9{,}5298638.$$

Die Differenz für $1''$ ist gleich 58,46, die Differenz für $27''$ ist also $27 . 58{,}46 = 1588{,}42$. Diese Differenz ist von 9,5298638 abzuziehen, weil ja der Cosinus mit wachsendem Winkel kleiner wird.

Nach dem Gesagten ist es nun auch leicht, den zum Logarithmen einer trigonometrischen Linie gehörigen Winkel zu finden. Gesetzt, der Logarithme des Sinus eines Winkels α sei 9,6959374. In den Tafeln findet sich als Logarithme des nächst kleineren Sinus 9,6958922 und

dieser gehört dem Winkel von $29^\circ 46'$ an. Er ist von unserem verschieden um 452. Die Differenz für $1''$ ist 36,8, und mit dieser hat man in 452 zu dividiren, um die Zahl der Secunden zu finden, um welche der Winkel α größer ist als $29^\circ 46'$. Das Resultat dieser Division ist 12,2; der Winkel α ist also $29^\circ 46' 12{,}2''$.

Es sei ferner $\log. \operatorname{cotang.} \beta = 9{,}7394567$. In den Tafeln findet sich als der nächst kleinere Cotangenten-Logarithme 9,7392707, dieser ist von unserem verschieden um 1860 und gehört einem Winkel von $61^\circ 15'$ an. Wächst der Logarithme um 49,92, so nimmt der Winkel um $1''$ ab, einer Zunahme 1860 des Logarithmen entspricht demnach eine Abnahme von $\frac{1860}{49{,}92} = 37''$, der Winkel β ist also $61^\circ 15' - 37'' = 61^\circ 14' 23''$.

23 **Beispiele.** Zur Uebung folgt hier die Auflösung einiger trigonometrischen Aufgaben mit Hülfe der Logarithmen.

1. Wenn eine Seite A und die drei Winkel bekannt sind, hat man nach Gleichung (28)

$$B = \frac{A \,.\, \sin. \beta}{\sin. \alpha}$$

$$C = \frac{A \,.\, \sin. \gamma}{\sin. \alpha}.$$

Es sei $A = 3728$, $\alpha = 49^\circ$, $\beta = 102^\circ$, also $\gamma = 29^\circ$, so findet man B und C durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \log. A &= 3{,}5714759 \\ + \log. \sin. \beta &= \underline{9{,}9904044} \\ & 13{,}5618803 \\ - \log. \sin. \alpha &= \underline{9{,}8777799} \\ \log. B &= 3{,}6841004 \\ B &= 4831{,}7 \ldots \\ \log. A &= 3{,}5714759 \\ + \log. \sin. \gamma &= \underline{9{,}6855712} \\ & 13{,}2570471 \\ - \log. \alpha &= \underline{9{,}8777799} \\ \log. C &= 3{,}3792672 \\ C &= 2394{,}7 \ldots \end{aligned}$$

Hier sind ohne Weiteres die um 10 zu großen Logarithmen von $\sin. \alpha$, $\sin. \beta$ und $\sin. \gamma$ angewendet worden, ohne daß es Einfluß auf das Re-

sultat hätte, weil ein um 10 zu großer Logarithme zu A addirt, dann aber auch wieder ein um 10 zu großer Logarithme abgezogen worden ist.

2. Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel γ. Man findet den Winkel β nach der Gleichung (30)

$$tang.\,\beta = \frac{B\ sin.\,\gamma}{A - B\,.\,cos.\,\gamma}.$$

Es sei $A = 3987$, $B = 2164$, $\gamma = 41^0$.

$$\begin{aligned}
log.\,B &= 3{,}3352573 \\
+\ log.\,sin.\,\gamma &= 9{,}8169429 \\
log.\,B\,.\,sin.\,\gamma &= 13{,}1522002 \\
-\ log.\,(A - B\,.\,cos.\,\gamma) &= 3{,}3718065 \\
log.\,tang.\,\beta &= 9{,}7803937 \\
\beta &= 31^0\,5'\,39'' \\
log.\,B &= 3{,}3352573 \\
+\ log.\,cos.\,\gamma &= 9{,}8777799 \\
log.\,B\,.\,cos.\,\gamma &= 3{,}2130372 \\
A &= 3987 \\
B\,.\,cos.\,\gamma &= 1633 \\
A - B\,.\,cos.\,\gamma &= 2354.
\end{aligned}$$

Wie der Logarithme des Zählers gefunden worden ist, bedarf keiner Erläuterung; eben so ist klar, daß der hier stehende Logarithme von $B\,.\,sin.\,\gamma$ eigentlich um 10 zu groß ist.

Die Addition unserer Werthe von $log.\,B$ und $log.\,cos.\,\gamma$ giebt uns einen um 10 zu großen Logarithmen von $B\,.\,cos.\,\gamma$. Um $B\,.\,cos.\,\gamma$ selbst zu finden, ist also der durch Addition gefundene Logarithme von $B\,.\,cos.\,\gamma$ erst um 10 zu verkleinern, was sogleich geschehen ist. Der gefundene Werth von $B\,.\,cos.\,\gamma$ wird von A abgezogen, um den Werth des Nenners zu finden; zu diesem Werthe wird der Logarithme gesucht und dieser vom Logarithmen des Zählers abgezogen, so findet man $log.\,tang.\,\beta$. Weil aber der Logarithme des Zählers, 13,1522002, um 10 zu groß ist, so ist auch der für $tang.\,\beta$ gefundene Werth von 10 zu groß, also gerade so, wie er in den Tafeln zu suchen ist.

Die fehlende Seite C könnte man nach der Formel $C^2 = A^2 + B^2 - 2\,A\,B\ cos.\,\gamma$ berechnen; weil diese Formel aber zum logarithmischen

Gebrauch sehr unbequem ist, so ist es besser, erst den Winkel β zu bestimmen, und dann C nach der Formel

$$C = \frac{B . sin. \gamma}{sin. \beta}$$

zu berechnen. $Log. B\ sin. \gamma$ ist schon bekannt, es ist

$$\begin{aligned} log. B\ sin. \gamma &= 13{,}1522002 \\ - log. sin. \beta &= \underline{9{,}7130251} \\ log. C &= 3{,}4391751 \\ C &= 2749. \end{aligned}$$

3. Gegeben zwei Seiten A und B und der Winkel β, welcher der einen von beiden gegenübersteht. Der Sinus des Winkels α wird gefunden durch die Gleichung

$$sin. \alpha = \frac{A . sin\ \beta}{B}.$$

Es sei $A = 3648$, $B = 5394$ und $\beta = 82^0$.

$$\begin{aligned} log. A &= 3{,}5620548 \\ + log. sin. \beta &= \underline{9{,}9957528} \\ & 13{,}5578076 \\ - log. B &= \underline{3{,}7319109} \\ log. sin. \alpha &= 9{,}8258967 \\ \alpha &= 42^0\,2'\,45''. \end{aligned}$$

Der Logarithme 13,557 ... ist eigentlich um 10 zu groß, weil der Tafel-Logarithme von $sin. \beta$ es ist; daraus folgt nun auch, daß der für $sin. \alpha$ berechnete Logarithme um 10 zu groß ist, also gerade so gefunden worden, wie er in den Tafeln zu suchen ist.

Nachdem der Winkel α berechnet worden ist, kann man leicht den Winkel γ finden, weil $\gamma = 180^0 - \beta - \alpha$, in unserem Falle ergiebt sich

$$\gamma = 55^0\,57'\,15''.$$

Nun findet man am schnellsten C nach der Gleichung

$$C = \frac{A . sin. \gamma}{sin. \alpha}$$

$$\begin{aligned} log. A &= 3{,}5620548 \\ + log. sin. \gamma &= \underline{9{,}9183183} \\ & 13{,}4803731 \\ log. sin. \alpha &= \underline{9{,}8258967} \\ log. C &= 3{,}6544764 \\ C &= 4513. \end{aligned}$$

4. Gegeben die drei Seiten. Man findet die fehlenden Winkel nach der Formel

$$cos.\,\alpha = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2\,B\,.\,C}.$$

Diese Formel ist indeß sehr unbequem zu logarithmischer Rechnung, man kann sie jedoch sehr leicht in eine andere verwandeln, welche bei Anwendung von Logarithmen rascher zum Ziele führt.

Es ist oben (Seite 16) gezeigt worden, daß

$$cos.\,2\,\alpha = 1 - 2\,(sin.\,\alpha)^2,$$

daraus folgt

$$cos.\,\alpha = 1 - 2\,(sin.\,{}^1/_2\,\alpha)^2,$$

wenn man α für $2\,\alpha$ setzt, daraus folgt

$$(sin.\,{}^1/_2\,\alpha)^2 = \frac{1 - cos.\,\alpha}{2},$$

setzt man in diesen Werth von $(sin.\,{}^1/_2\,\alpha)^2$ für $cos.\,\alpha$ seinen obigen Werth, so kommt

$$(sin.\,{}^1/_2\,\alpha)^2 = \frac{(A + B - C)\,(A + C - B)}{4\,B\,C},$$

also

$$sin.\,{}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{(A + B - C)\,(A + C - B)}{4\,B\,C}}.$$

Nach dieser Formel ist α leicht durch logarithmische Rechnung zu finden. Es sei $A = 76'$, $B = 97'$, $C = 58'$, so ist

$$A + B - C = 115,\ A + C - B = 37.$$

$$\begin{array}{lr}
log.\,(A + B - C) & = 2{,}0606978 \\
+\ log.\,(A + C - B) & = 1{,}5682017 \\
\hline
 & 3{,}6288995 \\
-\ log.\,4 & = 0{,}6020600 \\
\hline
 & 3{,}0268395 \\
-\ log.\,B & = 1{,}9867717 \\
\hline
 & 1{,}0400678 \\
-\ log.\,C & = 1{,}7634280 \\
\hline
 & 0{,}2766398 - 1,
\end{array}$$

dies durch 2 dividirt, so kommt

$$log.\,sin.\,{}^1/_2\,\alpha = 0{,}6383199 - 1.$$

Diesen Logarithmen entspricht der Tafel-Logarithme 9,6383199, und zu diesem findet man in den Tafeln den Winkel

$$\frac{1}{2}\alpha = 25^{0}46'25'',$$

also

$$\alpha = 51^{0}32'50''.$$

Die Formeln, welche man anwendet, um die fehlenden Stücke des Dreiecks zu berechnen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, eignen sich freilich nicht sonderlich für logarithmische Rechnung; man hat deshalb die Formeln in andere umgewandelt, welche zu diesem Zwecke etwas passender sind; da jedoch die umgewandelten Formeln keinen großen Vortheil gewähren, so wollen wir diese Umwandlungen hier ganz übergehen.

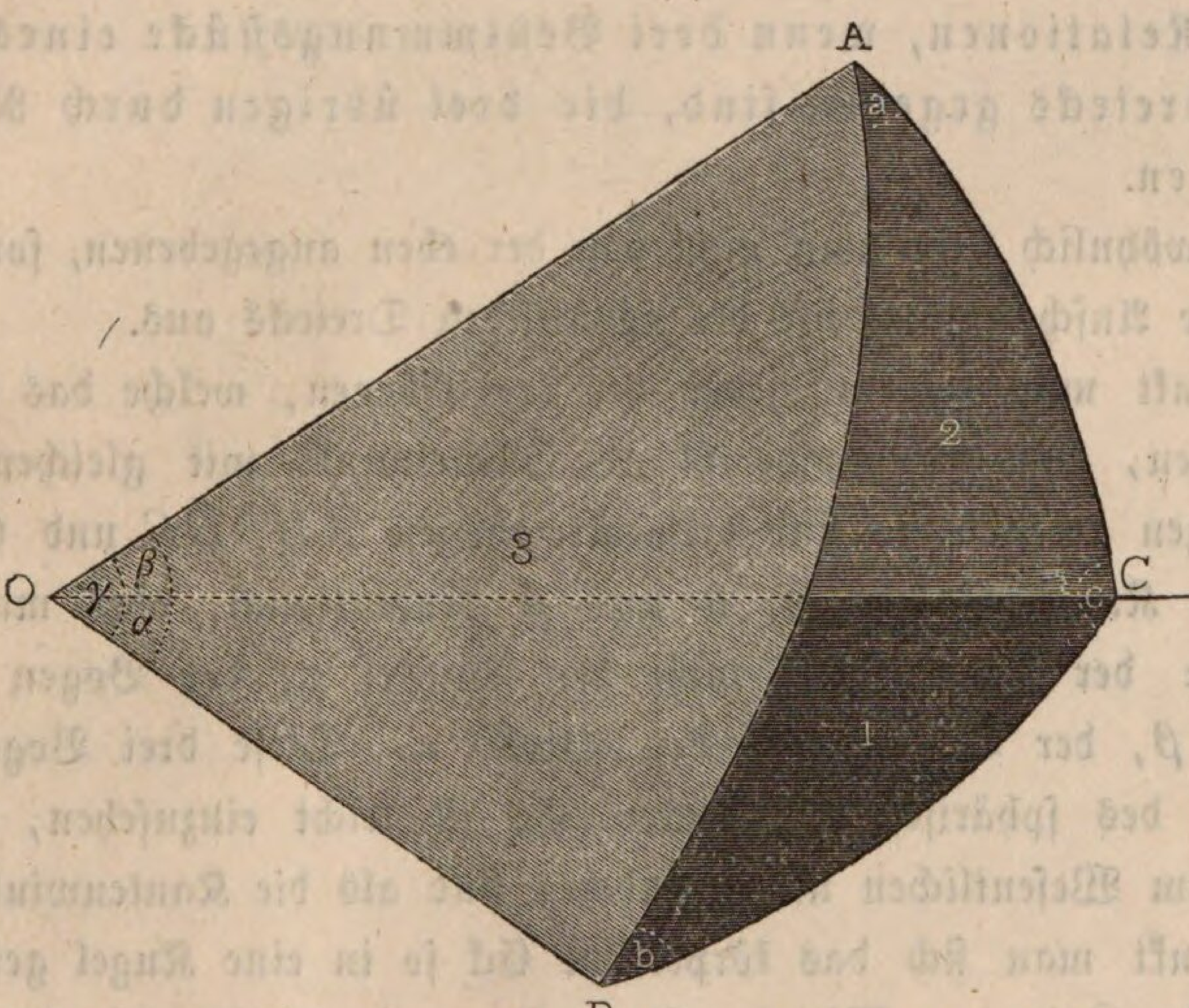
Zweites Buch.

Sphärische Trigonometrie.

Einleitung.

Ein durch drei Kanten gebildetes körperliches Eck ist ein sphärisches 24
Dreieck. Fig. 22 stellt ein solches sphärisches Dreieck dar, welches durch

Fig. 22.



die drei in O zusammentreffenden Kanten AO, CO und BO gebildet wird. In jeder Kante eines sphärischen Dreiecks schneiden sich zwei Ebenen. Der Winkel der beiden in AO sich schneidenden Ebenen AOC und AOB, die in der Figur mit 2 und 3 bezeichnet sind, sei mit a,

der Winkel der in der Kante OC sich schneidenden Ebenen 1 und 2 mit c, und der Winkel endlich der in OB sich schneidenden Ebenen 1 und 3 mit b bezeichnet. Diesen drei Winkeln a, b und c wollen wir den gemeinschaftlichen Namen Flächenwinkel geben.

Außer diesen drei Flächenwinkeln a, b und c kommen aber an einem sphärischen Dreieck noch drei andere vor, nämlich diejenigen, welche je zwei Kanten mit einander machen. Diese drei Kantenwinkel sind BOC, AOC und BOA. Es sei

$$\begin{aligned} \text{Winkel } BOC &= \alpha, \\ \text{»} \quad AOC &= \beta, \\ \text{»} \quad AOB &= \gamma, \end{aligned}$$

so also, daß jeder Kantenwinkel mit demjenigen griechischen Buchstaben bezeichnet ist, welcher dem lateinischen Buchstaben des gegenüberstehenden Flächenwinkels entspricht.

Es ist die Aufgabe der sphärischen Trigonometrie die Beziehungen aufzusuchen, welche zwischen den drei Kantenwinkeln und den drei Flächenwinkeln bestehen, und mit Hülfe dieser Relationen, wenn drei Bestimmungsstücke eines sphärischen Dreiecks gegeben sind, die drei übrigen durch Rechnung zu finden.

Gewöhnlich geht man nicht von der eben angegebenen, sondern von folgender Anschauungsweise des sphärischen Dreiecks aus.

Denkt man sich auf jeder der drei Ebenen, welche das körperliche Eck bilden, um die Spitze O als Mittelpunkt mit gleichem Radius Kreisbogen gezogen, so sind diese Kreisbogen AB, BC und CA offenbar den Kantenwinkeln γ, α und β proportional, oder mit anderen Worten: der Bogen AB mißt den Winkel γ, der Bogen AC den Winkel β, der Bogen BC den Winkel α. Diese drei Bogen heißen Seiten des sphärischen Dreiecks. Es ist leicht einzusehen, daß diese Seiten im Wesentlichen nichts anderes sind als die Kantenwinkel.

Denkt man sich das körperliche Eck so in eine Kugel gesteckt, daß die Spitze O in den Mittelpunkt zu liegen kommt, so schneiden die drei Ebenen 1, 2 und 3 die Kugeloberfläche in den Bogen AB, BC und CA; diese drei Bogen bilden ein auf der Kugeloberfläche liegendes Dreieck, daher der Name: sphärische Trigonometrie.

Bei den folgenden Entwickelungen wollen wir jedoch von der ersteren Betrachtungsweise des sphärischen Dreiecks als eines dreikantigen

körperlichen Ecks ausgehen, dessen ungeachtet aber der Kürze wegen die Flächenwinkel a, b, c nur **Winkel**, die Kantenwinkel α, β, γ **Seiten** des sphärischen Dreiecks nennen.

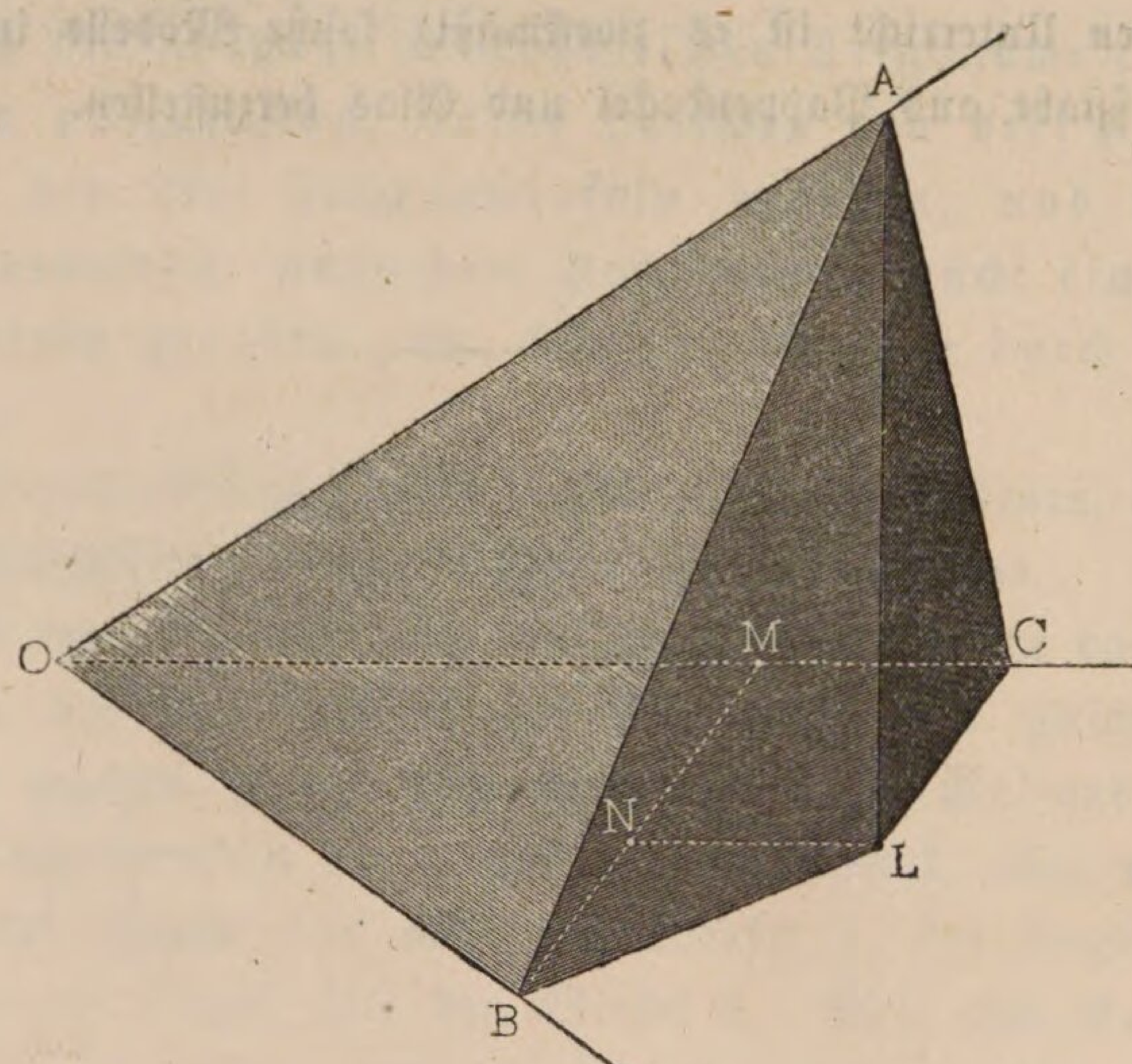
Da es für Manchen schwierig ist sich nach Zeichnungen zu richtigen Vorstellungen körperlicher Verhältnisse zu erheben, so sind diesem Werkchen die Netze der Figuren 23 und 24 beigegeben, welche zur Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie dienen. Diese Netze sind auf etwas stärkeres Papier aufzuziehen und nachdem die Gränzlinien vollständig durchgeschnitten sind, die ausgezogenen Linien (nicht die punktirten), welche im Innern der Figur liegen, so weit einzuschneiden, daß längs der eingeschnittenen Kanten ein leichtes Umbiegen möglich ist. Wie dann mit den so präparirten Netzen die in Fig. 23 und Fig. 24 dargestellten Körper vollendet werden, bedarf wohl keiner weiteren Erläuterung.

Für den Unterricht ist es zweckmäßig solche Modelle in weit größerem Maaßstabe aus Pappendeckel und Glas herzustellen.

---

25 **Entwickelung der Grundformeln.** Bezeichnet man auf der einen Kante eines dreikantigen körperlichen Ecks einen Punkt A, Fig. 23,

Fig. 23.



so daß AO der Längeneinheit gleich ist, fällt man alsdann die Perpendikel AB und AC auf die beiden anderen Kanten, so ist

$$\left.\begin{aligned} AB &= sin.\gamma \\ OB &= cos.\gamma \\ AC &= sin.\beta \\ OC &= cos.\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

da ja der Winkel AOB mit γ, und der Winkel AOC mit β bezeichnet worden ist.

Zieht man von B aus in der Ebene 1 eine Linie BL, welche auf der Kante OB rechtwinkelig steht, so ist der Winkel, den die Linien BA und BL mit einander machen, auch der Winkel der beiden in der Kante OB sich schneidenden Ebenen 1 und 3, der oben mit b bezeichnet wurde. Ebenso ist ACL der oben mit c bezeichnete Winkel der beiden in der Kante OC sich schneidenden Ebenen 1 und 2, wenn CL, in der Ebene 1 liegend, auf OC rechtwinkelig steht.

Legt man eine Ebene durch BA und BL, eine zweite Ebene durch CA und CL, so werden sich die beiden Ebenen in einer Linie AL schneiden, die auf der Ebene 1 rechtwinkelig steht. Daraus folgt dann, daß die Dreiecke BAL und CAL rechtwinkelig sind. Demnach ist aber

$$AL = BA \sin. \mathrm{b}$$

und, wenn man für BA seinen Werth $\sin.\gamma$ setzt,

$$AL = \sin. \mathrm{b} \sin. \gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aber ebenso ergiebt sich aus dem rechtwinkeligen Dreieck CAL

$$AL = AC \sin. \mathrm{c}$$

oder

$$AL = \sin. \beta \sin. \mathrm{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Setzt man die beiden Werthe von AL in (2) und (3) gleich, so kommt

$$\sin. \mathrm{b} \sin. \gamma = \sin. \mathrm{c} \sin. \beta$$

und daraus

$$\sin. \mathrm{b} : \sin. \mathrm{c} = \sin. \beta : \sin. \gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

oder in Worten: In jedem sphärischen Dreieck verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Wie schon oben (Gleichung 1) erwähnt wurde, ist $OC = \cos. \beta$. Fällt man nun von B ein Perpendikel BM auf OC, so wird dadurch OC in zwei Theile OM und MC getheilt, es ist also

$$\cos. \beta = OM + MC.$$

Nun aber ist

$$OM = OB . \cos. \alpha = \cos. \gamma . \cos. \alpha$$

und

$$MC = NL = BL . \sin. \alpha,$$

denn der Winkel LBN ist gleich α, weil jeder Schenkel desselben BN und BL auf einem Schenkel des Winkels α rechtwinkelig steht. Aus dem rechtwinkeligen Dreieck ABL aber folgt

$$BL = AB . \cos. \mathrm{b} = \sin. \gamma . \cos. \mathrm{b} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

folglich ist

$$MC = sin.\gamma \,.\, sin.\alpha \,.\, cos.\,\mathrm{b}.$$

Setzt man in obigen Werth von $cos.\beta$ die eben gefundenen Werthe von OM und MC, so kommt

$$cos.\beta = cos.\alpha \,.\, cos.\gamma + sin.\alpha \,.\, sin.\gamma \,.\, cos.\,\mathrm{b} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Dieser Gleichung analog ist auch

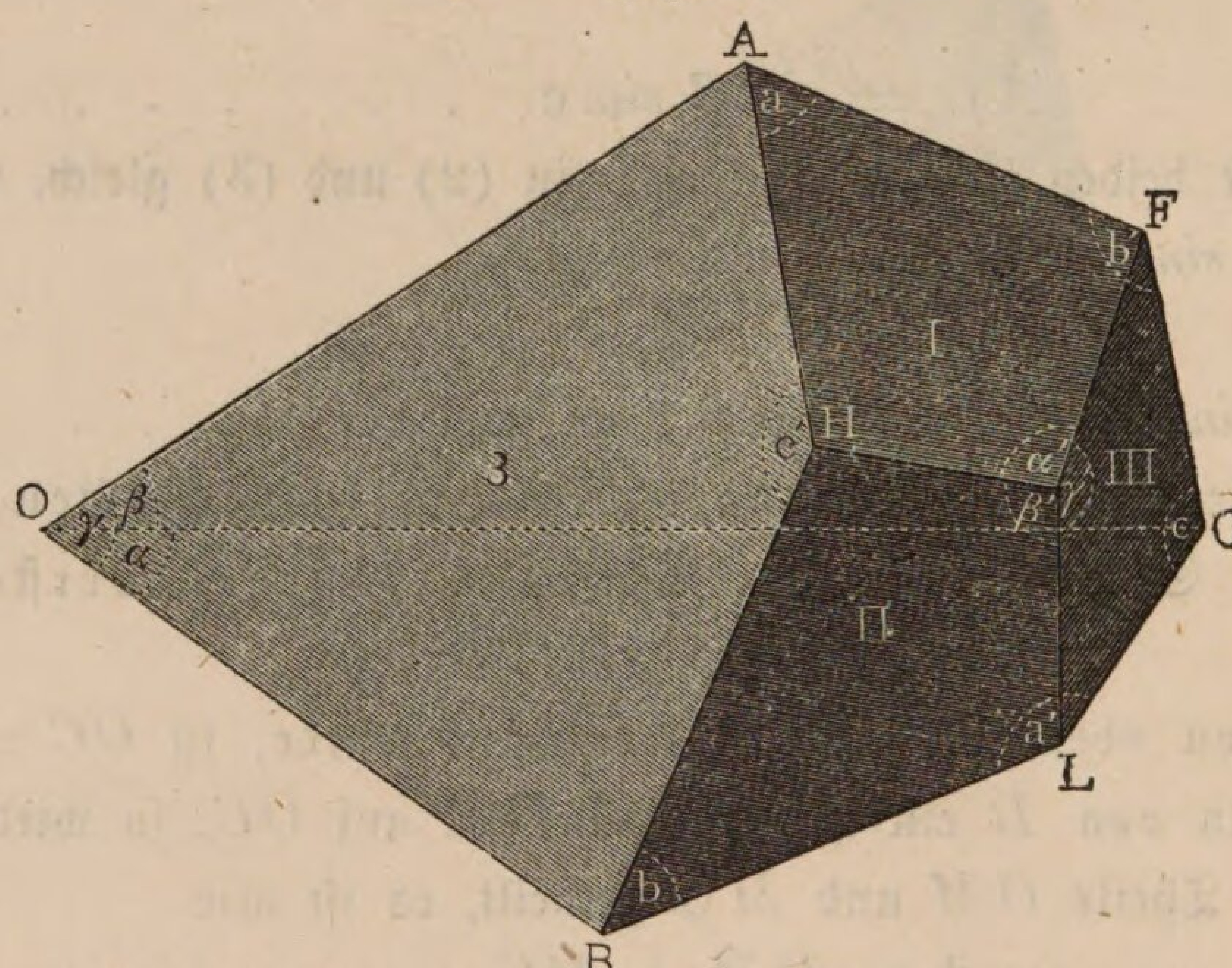
$$\left.\begin{array}{l} cos.\gamma = cos.\alpha \,.\, cos.\beta + sin.\alpha \,.\, sin.\beta \,.\, cos.\,\mathrm{c} \\ cos.\alpha = cos.\beta \,.\, cos.\gamma + sin.\beta \,.\, sin.\gamma \,.\, cos.\,\mathrm{a} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

welches die zweite Grundformel der sphärischen Trigonometrie ist.

Durch Anwendung der beiden Grundformeln (4) und (6) kann man alle Aufgaben der sphärischen Trigonometrie lösen, wenn man noch die Eigenschaften des Polardreiecks zu Hülfe nimmt, die im folgenden Paragraphen entwickelt werden sollen.

26 **Das Polardreieck.** Legt man durch irgend einen Punkt A, Fig. 24, der einen Kante des sphärischen Dreiecks eine Ebene I, welche rechtwin-

Fig. 24.



kelig auf AO steht, legt man ferner eine zweite Ebene II durch B rechtwinkelig auf BO, so werden sich die beiden Ebenen I und II in einer Kante HE (wegen Mangel an Raum fehlt E in der Figur) schneiden, die auf der Ebene 3 perpendikulär steht.

Legt man eine dritte Ebene III rechtwinkelig auf OC, so wird diese mit II sich in der Kante LE, mit I in der Kante FE schneiden. LE steht perpendikulär auf der Ebene I, FE auf II. Die drei Kanten HE, LE und FE bilden ein neues sphärisches Dreieck, dessen Spitze in E ist. Die Kanten- und Flächenwinkel dieses neuen sphärischen Dreiecks

welches Polardreieck oder Complementardreieck heißen mag, bieten sehr wichtige Beziehungen zu denen des ursprünglichen dar.

Die Kantenwinkel des neuen sphärischen Dreiecks sind

$$HEL = \beta'$$
$$HEF = \alpha'$$
$$FEL = \gamma'.$$

Die Flächenwinkel sind

$$AHB = \mathrm{c}'$$
$$AFC = \mathrm{b}'$$
$$CLB = \mathrm{a}'$$

und zwar ist c′ der Winkel der Ebenen I und II, b′ der Winkel der Ebenen I und III, und a′ der Winkel der Ebenen II und III.

Betrachten wir das Viereck $HELB$, so finden wir in demselben zwei rechte Winkel, einen bei L und einen bei H. Der Winkel bei E ist der mit β' bezeichnete, der bei B der mit b bezeichnete. Da die vier Winkel eines Vierecks zusammen vier Rechte betragen, da ferner die Winkel bei H und der bei L zusammengenommen zwei Rechte betragen, so müssen die Winkel b und β' zusammen auch zwei Rechte sein, es ist also

$$\beta' = 180^0 - \mathrm{b}.$$

Ebenso ergiebt sich aus den Vierecken $HAEF$ und $FELC$

$$\alpha' = 180^0 - \mathrm{a}$$
$$\gamma' = 180^0 - \mathrm{c},$$

oder in Worten: **Die Kantenwinkel des Polardreiecks sind die Complemente der entsprechenden Flächenwinkel des ursprünglichen sphärischen Dreiecks.**

In dem Viereck $AOBH$ sind zwei rechte Winkel, einer bei A und einer bei B, mithin müssen die beiden anderen Winkel dieses Vierecks, γ und c′, zusammengenommen auch zwei Rechte machen; es ist also

$$\mathrm{c}' = 180^0 - \gamma,$$

ebenso folgt aus der Betrachtung der Vierecke $AOCF$ und $BOCL$

$$\mathrm{b}' = 180^0 - \beta$$
$$\mathrm{a}' = 180^0 - \alpha,$$

oder in Worten: **Die Flächenwinkel a′, b′, c′ des Polardreiecks sind die Complemente der entsprechenden Kantenwinkel (Seiten) α, β, γ des ursprünglichen.**

Aus den eben angeführten Relationen folgt unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned} sin.\,a' &= sin.\,\alpha \\ sin.\,b' &= sin.\,\beta \\ sin.\,c' &= sin.\,\gamma \\ cos.\,a' &= -\,cos.\,\alpha \\ cos.\,b' &= -\,cos.\,\beta \\ cos.\,c' &= -\,cos.\,\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} sin.\,\alpha' &= sin.\,a \\ sin.\,\beta' &= sin.\,b \\ sin.\,\gamma' &= sin.\,c \\ cos.\,\alpha' &= -\,cos.\,a \\ cos.\,\beta' &= -\,cos.\,b \\ cos.\,\gamma' &= -\,cos.\,c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

27 **Berechnung der fehlenden Stücke sphärischer Dreiecke.** Wenn drei Elemente eines sphärischen Dreiecks bekannt sind, so kann man mit Hülfe der oben entwickelten Grundsätze die fehlenden Stücke berechnen. Die gegebenen Stücke können nun sein:

1. Die drei Seiten (Kantenwinkel).
2. Die drei Flächenwinkel.
3. Zwei Seiten und der eingeschlossene Flächenwinkel.
4. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.
5. Zwei Seiten und der der einen gegenüberstehende Flächenwinkel.
6. Eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberstehender Flächenwinkel.

Wir wollen jetzt näher untersuchen, wie in jedem dieser sechs Fälle die fehlenden Stücke zu suchen sind.

Erster Fall. Gegeben die drei Seiten α, β und γ.

Hier sind die drei Flächenwinkel a, b und c zu suchen. Aus der zweiten Grundformel, Gleichung (6), ergiebt sich

$$cos.\,b = \frac{cos.\,\beta - cos.\,\alpha\,.\,cos.\,\gamma}{sin.\,\alpha\,.\,sin.\,\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Diese Formel muß aber umgeformt werden, wenn sie sich für logarithmische Rechnung eignen soll. Es ist bekanntlich

$$cos.\,b = 1 - 2\,.\,(sin.\,{}^1\!/_2\,b)^2,$$

also

$$2\,(sin.\,{}^1\!/_2\,b)^2 = 1 - cos.\,b,$$

und wenn man für $\cos. b$ den Werth bei (9) setzt,

$$(\sin. {}^1\!/_2\, b)^2 = {}^1\!/_2 \left(1 - \frac{\cos.\beta - \cos.\alpha \,.\, \cos.\gamma}{\sin.\alpha \,.\, \sin.\gamma}\right)$$

oder

$$(\sin. {}^1\!/_2\, b)^2 = \frac{\sin.\alpha \,.\, \sin.\gamma + \cos.\alpha \,.\, \cos.\gamma - \cos.\beta}{2 \,.\, \sin.\alpha \,.\, \sin.\gamma}.$$

Da aber $\cos.\alpha \,.\, \cos.\gamma + \sin.\alpha \,.\, \sin.\gamma = \cos.(\alpha - \gamma)$, so ist auch

$$(\sin. {}^1\!/_2\, b)^2 = \frac{\cos.(\alpha - \gamma) - \cos.\beta}{2 \,.\, \sin.\alpha \,.\, \sin.\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Der Zähler dieses Bruches enthält die Differenz zweier Cosinus. Diese Differenz muß aber in ein Product umgewandelt werden, was folgendermaßen geschieht. Es ist bekanntlich

$$\cos.(x + y) = \cos.x \,.\, \cos.y - \sin.x \,.\, \sin.y$$

$$\cos.(x - y) = \cos.x \,.\, \cos.y + \sin.x \,.\, \sin.y.$$

Zieht man die obere Gleichung von der anderen ab, so kommt

$$\cos.(x - y) - \cos.(x + y) = 2 \,.\, \sin.x \,.\, \sin.y \,. \quad (11)$$

Wir haben also hier eine Gleichung, in welcher die Differenz zweier Cosinus durch das Product zweier Sinus ausgedrückt ist. Soll diese Formel auf unsern Fall angewendet werden, so hat man x und y nur so zu bestimmen, daß

$$x - y = \alpha - \gamma$$

$$x + y = \beta$$

wird. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$x = {}^1\!/_2 (\beta + \alpha - \gamma)$$

$$y = {}^1\!/_2 (\beta + \gamma - \alpha);$$

substituirt man diese Werthe statt x und y in Gleichung (11), so kommt

$$\cos.(\alpha - \gamma) - \cos.\beta = 2 \,.\, \sin. {}^1\!/_2 (\beta + \alpha - \gamma) \sin. {}^1\!/_2 (\beta + \gamma - \alpha);$$

substituirt man endlich diesen Werth von $\cos.(\alpha - \gamma) - \cos.\beta$ in Gleichung (10), so kommt

$$(\sin. {}^1\!/_2\, b)^2 = \frac{\sin. {}^1\!/_2 (\beta + \alpha - \gamma) \,.\, \sin. {}^1\!/_2 (\beta + \gamma - \alpha)}{\sin.\alpha \,.\, \sin.\gamma} \,. \quad (12)$$

welches eine für logarithmische Rechnung geeignete Formel ist.

Dieser Formel analog hat man auch

$$\left.\begin{aligned} (\sin. {}^1\!/_2\, a)^2 &= \frac{\sin. {}^1\!/_2 (\alpha + \beta - \gamma) \sin. {}^1\!/_2 (\alpha + \gamma - \beta)}{\sin.\beta \,.\, \sin.\gamma} \\ (\sin. {}^1\!/_2\, c)^2 &= \frac{\sin. {}^1\!/_2 (\gamma + \beta - \alpha) \sin. {}^1\!/_2 (\gamma + \alpha - \beta)}{\sin.\beta \,.\, \sin.\alpha} \end{aligned}\right\} . \quad (12)$$

Als Beispiel zur Ausführung der Rechnung mag Folgendes dienen:
Es sei $\alpha = 80^0$, $\beta = 104^0$, $\gamma = 62^0$, so ist

$$\begin{aligned}
{}^1/_2 (\beta + \alpha - \gamma) &= 61^0 \\
{}^1/_2 (\beta + \gamma - \alpha) &= 43^0 \\
log.\,sin.\,61^0 &= 9{,}9418193 \\
log.\,sin.\,43^0 &= 9{,}8337833 \\
&\quad 19{,}7756026 \\
-\,log.\,sin.\,80^0 &= 9{,}9933515 \\
&\quad 9{,}7822511 \\
-\,log.\,sin.\,62^0 &= 9{,}9459349 \\
log.\,(sin.\,{}^1/_2\,b)^2 &= \bar{1}{,}8363162 \\
log.\,sin.\,{}^1/_2\,b &= \bar{1}{,}9181581 \\
{}^1/_2\,b &= 55^0\,55'\;7{,}4'' \\
b &= 111^0\,50'\,14{,}8''.
\end{aligned}$$

Ebenso ist auch a und c zu berechnen.

Zweiter Fall. Gegeben die drei Flächenwinkel a, b, c, gesucht die drei Seiten α, β, γ.

Zur Lösung dieser Aufgabe muß man das Polardreieck zu Hülfe nehmen. Statt β zu bestimmen, sucht man nur den Flächenwinkel b' des Polardreiecks nach Gleichung (9); man findet

$$cos.\,b' = \frac{cos.\,\beta' - cos.\,\alpha'.\,cos.\,\gamma'}{sin.\,\alpha'.\,sin.\,\gamma'}.$$

Da aber die Winkel α', β', γ' Complemente der gegebenen Winkel a, b, c sind, so kann man $cos.\,\alpha'$ mit $-\,cos.\,a$, $cos.\,\beta'$ mit $-\,cos.\,b$, und $cos.\,\gamma'$ mit $-\,cos.\,c$, und ferner noch die Sinus von α' und γ' mit den Sinus von a und c vertauschen (Gleichung 8), und so erhält man

$$cos.\,b' = -\,\frac{cos.\,b + cos.\,a\,.\,cos.\,c}{sin.\,a\,.\,sin.\,c}.$$

Es ist aber auch $cos.\,b' = -\,cos.\,\beta$, folglich

$$cos.\,\beta = \frac{cos.\,b + cos.\,a\,.\,cos.\,c}{sin.\,a\,.\,sin.\,c}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (13)$$

Diese Formel ist gerade so wie die oben für $cos.\,b$ gefundene zum Behuf logarithmischer Rechnung umzuformen.

Weil

$$2\,.\,(sin.\,{}^1/_2\,\beta)^2 = 1 - cos\;\beta,$$

so hat man auch

$$2\,(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = 1 - \frac{cos.\,b + cos.\,a\,.\,cos.\,c}{sin.\,a\,.\,sin.\,c}$$

$$2\,(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = \frac{sin.\,a\,.\,sin.\,c - cos.\,a\,.\,cos.\,c - cos.\,b}{sin.\,a\,.\,sin.\,c}$$

$$2\,(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = -\frac{cos.\,(a + c) + cos.\,b}{sin.\,a\,.\,sin.\,c} \quad . \; . \; . \; . \; (14)$$

Die Summe der beiden Cosinus im Zähler ist noch in ein Product zu verwandeln. Addirt man die beiden Gleichungen

$$cos.\,(x + y) = cos.\,x\,.\,cos.\,y - sin.\,x\,.\,sin.\,y$$
$$cos.\,(x - y) = cos.\,x\,.\,cos.\,y + sin.\,x\,.\,sin.\,y,$$

so kommt

$$cos.\,(x + y) + cos.\,(x - y) = 2\,cos.\,x\,.\,cos.\,y.$$

Soll nun $x + y = a + c$ und $x - y = b$ sein, so muß

$$x = {}^1/_2\,(a + b + c)$$
$$y = {}^1/_2\,(a + c - b)$$

gesetzt werden; substituirt man diese Werthe von x und y in die vorige Gleichung, so kommt

$$cos.\,(a + c) + cos.\,b = 2\,.\,cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\;cos.\,{}^1/_2\,(a + c - b),$$

und wenn man diesen Werth für die Summe der beiden Cosinus in Gleichung (14) setzt,

$$(sin.\,{}^1/_2\beta)^2 = -\frac{cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\;cos.\,{}^1/_2\,(a + c - b)}{sin.\,a\,.\,sin.\,c} \quad . \; (15)$$

Die Ausführung der logarithmischen Rechnung ist der Berechnung nach Gleichung (13) so ähnlich, daß sie wohl keiner weiteren Auseinandersetzung bedarf. Für die Bestimmungen der Winkel α und γ hat man analog der Gleichung (15) die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (sin.\,{}^1/_2\alpha)^2 &= \frac{cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\;cos.\,{}^1/_2\,(b + c - a)}{sin.\,b\,.\,sin.\,c} \\ (sin.\,{}^1/_2\gamma)^2 &= \frac{cos.\,{}^1/_2\,(a + b + c)\;cos.\,{}^1/_2\,(a + b - c)}{sin.\,a\,.\,sin.\,b} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (15)$$

Dritter Fall. Gegeben zwei Seiten (etwa α und γ) und der eingeschlossene Flächenwinkel (b). Es kann hier gefragt werden 1. nach dem dritten Kantenwinkel (der dritten Seite) β, und 2. nach den fehlenden Winkeln a und c. Es sind also hier zwei gesonderte Aufgaben zu lösen.

1. Wenn die Seite β gesucht ist, so giebt Gleichung (6) unmittelbar

$$cos.\,\beta = cos.\,\alpha\,.\,cos.\,\gamma + sin.\,\alpha\,.\,sin.\,\gamma\,.\,cos.\,b.$$

Es sei z. B. $\alpha = 64^0$, $\gamma = 51^0$, $\mathrm{b} = 82^0$, so ist die Rechnung folgende:

$$\begin{array}{ll} log. cos. 64^0 = 9{,}6418420 & log. sin. 64^0 = 9{,}9536602 \\ log. cos. 51^0 = 9{,}7988718 & log. sin. 51^0 = 9{,}8905026 \\ \overline{\quad\bar{1}{,}4407138} & log. cos. 82^0 = 9{,}1435553 \\ & \overline{\quad\bar{2}{,}9877181} \end{array}$$

$$\begin{aligned} cos. 64^0,\ cos. 51^0 &= 0{,}2758759 \\ sin. 64^0,\ sin. 51^0,\ cos. 82^0 &= 0{,}0972116 \\ cos. \beta &= 0{,}3730875 \\ \beta &= 68^0\,5'\,38''. \end{aligned}$$

Es wird wohl klar sein, warum man nach Addition von $log. cos. 64^0$ und $log. cos. 51^0$ nicht die unmittelbar erhaltene Kennziffer 19, sondern $\bar{1}$, und warum man bei der folgenden Addition nicht die unmittelbar erhaltene Kennziffer 28, sondern $\bar{2}$ genommen hat! (Ebene Trigonometrie §. 22.)

Man sieht wohl aus dieser Ausführung der Rechnung, daß diese Formel für die Anwendung der Logarithmen nicht sonderlich bequem ist. Nach siebenmaligem Aufschlagen erhält man $cos. \beta$. Hat man nun Tafeln, welche die Sinus und Cosinus selbst von Minute zu Minute enthalten, so ist die Rechnung nach achtmaligem Aufschlagen fertig, hat man jedoch solche Tafeln nicht, so muß man zu dem gefundenen Werth von $cos. \beta$ erst noch den Logarithmen, und zu diesem erst den Winkel aufsuchen; man kommt also erst nach neunmaligem Aufschlagen zum Ziel. Die Gleichung (6) läßt sich jedoch umformen. Setzt man $cos. \gamma\ tang. \gamma$ statt $sin. \gamma$, so kommt

$$cos. \beta = cos. \alpha \,.\, cos. \gamma + sin. \alpha \,.\, cos. \gamma \,.\, tang. \gamma \,.\, cos. \mathrm{b}$$

$$cos. \beta = cos. \gamma\ (cos. \alpha + sin. \alpha \,.\, tang. \gamma \,.\, cos. \mathrm{b}),$$

setzt man nun

$$tang. \varrho = cos. \mathrm{b} \,.\, tang. \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

so kommt

$$cos. \beta = cos. \gamma\ (cos. \alpha + sin. \alpha \,.\, tang. \varrho)$$

$$cos. \beta = \frac{cos. \gamma}{cos. \varrho}\ (cos. \alpha \,.\, cos. \varrho + sin. \alpha \,.\, sin. \varrho)$$

$$cos. \beta = \frac{cos. \gamma}{cos. \varrho}\ cos. (\alpha - \varrho) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Hat man mit Hülfe von Gleichung (17) den Werth des Hülfswinkels ϱ

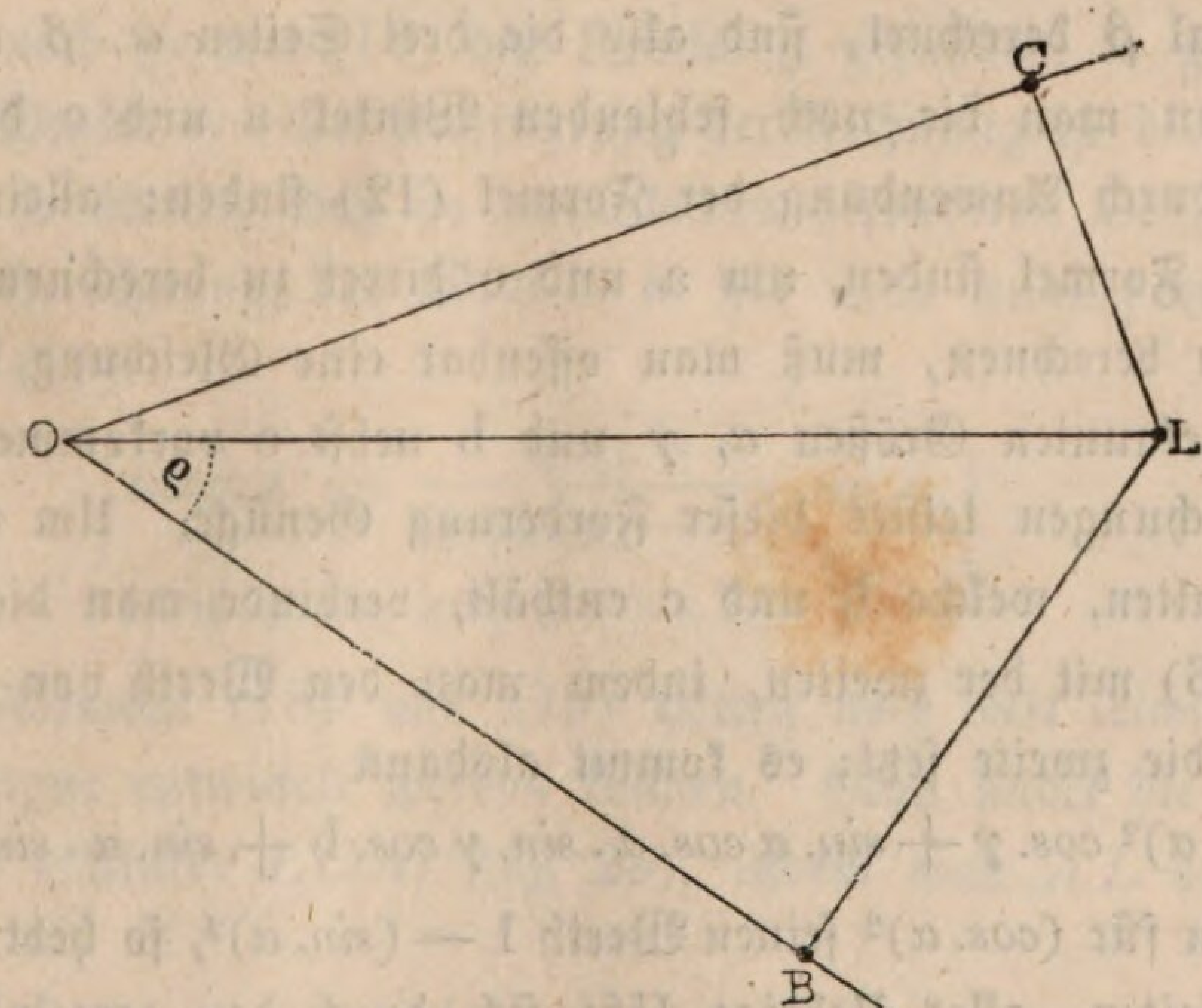
gefunden, so findet man β leicht nach Gleichung (16). Nehmen wir das oben nach Gleichung (6) berechnete Beispiel. Es sei also $\alpha = 64^0$, $\gamma = 51^0$, $b = 82^0$.

$$
\begin{aligned}
log.\,cos.\,b &= 9{,}1435553 \\
log.\,tang.\,\gamma &= 10{,}0916308 \\
\hline
log.\,tang.\,\varrho &= 9{,}2351861 \\
\varrho &= 9^0\,45'\ 6{,}6'' \\
\alpha - \varrho &= 54^0\,14'\,53{,}4'' \\
log.\,cos.\,\gamma &= 9{,}7988718 \\
log.\,cos.\,\varrho &= 8{,}9936789 \\
\hline
& \overline{1},8051929 \\
+\ log.\,cos.\,(\alpha - \varrho) &= 9{,}7666179 \\
\hline
log.\,cos.\,\beta &= 9{,}5718108 \\
\beta &= 68^0\,5'\,38''.
\end{aligned}
$$

Hier ist die Aufgabe nach siebenmaligem Aufschlagen gelöst.

Die Formeln (16) und (17) lassen sich auch unmittelbar aus der Betrachtung der Figur ableiten. Man denke sich in Fig. 23, Seite 52, eine Linie von L nach O gezogen, so wird der Winkel α in zwei Theile

Fig. 25.



COL und LOB getheilt. Um nicht durch die perspectivische Zeichnung der Fig. 23 und die in der Figur enthaltenen nicht zu dieser Betrachtung gehörigen Linien irre zu machen, sei in Fig. 25 die Ebene 1 mit den zu dieser Betrachtung gehörigen Linien unverkürzt dargestellt.

Die Buchstaben O, C, B und L bezeichnen in Fig. 23 und in Fig. 25 dieselben Punkte. Der Winkel COB, Fig. 25, ist der bisher stets mit α bezeichnete. Bezeichnet man nun den Winkel BOL mit ϱ, so ist leicht die Tangente des Winkels ϱ zu bestimmen, denn es ist

$$tang.\, \varrho = \frac{BL}{BO}.$$

Nun aber ist $BL = sin.\, \gamma \,.\, cos.\, \mathrm{b}$ (Gleichung 5) und $BO = cos.\, \gamma$ (Gleichung 1), also

$$tang.\, \varrho = \frac{cos.\, \mathrm{b} \,.\, sin.\, \gamma}{cos.\, \gamma} = cos.\, \mathrm{b} \,.\, tang.\, \gamma.$$

Ist nun ϱ bekannt, so findet man leicht OL als Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks OBL, denn es ist

$$OL = \frac{OB}{cos.\, \varrho} = \frac{cos.\, \gamma}{cos.\, \varrho}.$$

Um aber endlich OC oder den Werth von $cos.\, \beta$ zu finden, hat man nur die Hypotenuse OL mit dem Cosinus des Winkels LOC, welcher $\alpha - \varrho$ ist, zu multipliciren. Man hat also

$$cos.\, \beta = OL \,.\, cos.\, (\alpha - \varrho)$$

$$cos.\, \beta = \frac{cos.\, \gamma}{cos.\, \varrho}\, cos.\, (\alpha - \varrho).$$

Ist einmal β berechnet, sind also die drei Seiten α, β und γ bekannt, so kann man die noch fehlenden Winkel a und c des dritten Falles leicht durch Anwendung der Formel (12) finden; allein es läßt sich auch eine Formel finden, um a und c direct zu berechnen.

Um c zu berechnen, muß man offenbar eine Gleichung haben, in welcher die bekannten Größen α, γ und b nebst c vorkommen. Keine der Grundgleichungen leistet dieser Forderung Genüge. Um eine Gleichung zu erhalten, welche b und c enthält, verbinde man die erste der Gleichungen (6) mit der zweiten, indem man den Werth von $cos.\, \beta$ aus der ersten in die zweite setzt; es kommt alsdann

$$cos.\, \gamma = (cos.\, \alpha)^2\, cos.\, \gamma + sin.\, \alpha\, cos.\, a \,.\, sin.\, \gamma\, cos.\, \mathrm{b} + sin.\, \alpha \,.\, sin.\, \beta \,.\, cos.\, \mathrm{c}.$$

Setzt man nun für $(cos.\, \alpha)^2$ seinen Werth $1 - (sin.\, \alpha)^2$, so hebt sich $cos.\, \gamma$ auf beiden Seiten, alles Uebrige läßt sich durch den gemeinschaftlichen Factor $sin.\, \alpha$ dividiren, und man erhält so die Gleichung

$$sin.\, \alpha \,.\, cos.\, \gamma = cos.\, \alpha \,.\, sin.\, \gamma\, cos.\, \mathrm{b} + sin.\, \beta\, cos.\, \mathrm{c}.$$

Diese Gleichung enthält aber noch die unbekannte Größe $sin.\, \beta$, es ist aber nach Gleichung (4)

$$sin.\beta = \frac{sin.\gamma . sin.\mathrm{b}}{sin.\mathrm{c}};$$

setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung, dividirt man alsdann mit $sin.\gamma$, so kommt

$$sin.\alpha . cotang.\gamma = cos.\alpha . cos.\mathrm{b} + sin.\mathrm{b}\ cotang.\mathrm{c}$$

oder

$$\frac{sin.\alpha\ cos.\mathrm{b}}{tang.\gamma\ cos.\mathrm{b}} = cos.\alpha . cos.\mathrm{b} + sin.\mathrm{b} . cotang.\mathrm{c};$$

setzt man nun

$$tang.\gamma . cos.\mathrm{b} = tang.\varrho \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (18)$$

so wird diese Gleichung

$$\frac{sin.\alpha . cos.\mathrm{b}}{tang.\varrho} = cos.\alpha . cos.\mathrm{b} + sin.\mathrm{b} . cotang.\mathrm{c}$$

und daraus

$$cotang.\mathrm{c} = cotang.\mathrm{b}\left(\frac{sin.\alpha}{tang.\varrho} - cos.\alpha\right)$$

$$cotang.\mathrm{c} = \frac{cotang.\mathrm{b}}{sin.\varrho}(sin.\alpha\ cos.\varrho - cos.\alpha . sin.\varrho)$$

$$tang.\mathrm{c} = \frac{tang.\mathrm{b}}{sin.(\alpha - \varrho)} sin.\varrho \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (19)$$

Hat man nach Formel (18) den Winkel ϱ gefunden, so giebt Gleichung (19) den Winkel c. Die Ausführung der Rechnung ist der oben (§. 26) gemachten so ähnlich, daß sie wohl keines besonderen Beispiels bedarf.

Zur Berechnung des Winkels a hat man analog die Gleichungen (18) und (19)

$$\left.\begin{aligned} tang.\mathrm{a} &= \frac{tang.\mathrm{b}}{tang.(\gamma - \varrho)} sin.\varrho \\ tang.\varrho &= tang.\alpha . cos.b \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (20)$$

Die Formeln (18) und (19) hätten noch weit leichter unmittelba aus der Figur entwickelt werden können. Man findet die Tangente des Winkels c (Winkel LCA, Fig. 23), indem man AL durch LC dividirt, also

$$tang.\mathrm{c} = \frac{AL}{LC}.$$

Es ist aber nach Gleichung (3) $AL = sin.\gamma . sin.\mathrm{b}$. Es ist ferner $LC = OL . sin.(\alpha - \varrho)$, wenn ϱ dieselbe Bedeutung wie in §. 26 behält

Für OL läßt sich substituiren $\frac{LB}{sin.\,\varrho}$ oder $\frac{sin.\,\gamma\,.\,cos.\,\mathrm{b}}{sin.\,\varrho}$, also

$$LC = \frac{sin.\,\gamma\,.\,cos.\,\mathrm{b}\,.\,sin.\,(\alpha - \varrho)}{sin.\,\varrho},$$

und endlich, wenn man für AL und LC ihre Werthe setzt,

$$tang.\,\mathrm{c} = sin.\,\gamma\,.\,sin.\,\mathrm{b}\,.\,\frac{sin.\,\gamma\,.\,cos.\,\mathrm{b}\,.\,sin.\,(\alpha - \varrho)}{sin.\,\varrho}$$

oder

$$tang.\,\mathrm{c} = \frac{tang.\,\mathrm{b}}{sin.\,(\alpha - \varrho)}\,sin.\,\varrho.$$

Zur Berechnung des Hülfswinkels ϱ hat man wie oben §. 26 die Gleichung

$$tang.\,\varrho = cos.\,\mathrm{b}\,.\,tang.\,\gamma.$$

Vierter Fall. Gegeben eine Seite (etwa γ) und die beiden anliegenden Winkel (a und b). Die fehlenden Stücke sind die beiden Seiten α und β und der dritte Winkel c. Diese fehlenden Stücke finden wir durch Zuziehung des Polardreiecks; durch γ, a und b sind die Größen c', α' und β' bekannt. Der Gleichung (16) und (17) ganz analog hat man aber

$$tang.\,\psi = cos.\,\mathrm{c}'\,.\,tang.\,\beta'$$

und

$$cos.\,\gamma' = \frac{cos.\,\beta'}{cos.\,\psi}\,cos.\,(\alpha' - \psi).$$

Nun aber läßt sich wegen der Eigenschaften des Polardreiecks $cos.\,\gamma'$ mit $-\,cos.\,\mathrm{c}$, $cos.\,\beta'$ mit $-\,cos.\,\mathrm{b}$, $cos.\,\mathrm{c}'$ mit $-\,cos.\,\gamma$, $tang.\,\beta'$ mit $-\,tang.\,\mathrm{b}$, α' mit $180^0 - \mathrm{a}$ vertauschen, und so erhält man

$$cos.\,\mathrm{c} = \frac{cos.\,\mathrm{b}}{cos.\,\psi}\,.\,cos.\,(180^0 - \mathrm{a} - \psi)$$

oder

$$cos.\,\mathrm{c} = -\,\frac{cos.\,\mathrm{b}}{cos.\,\psi}\,.\,cos.\,(\mathrm{a} + \psi)$$

und

$$tang.\,\psi = cos.\,\gamma\,.\,tang.\,\mathrm{b}.$$

Will man das negative Zeichen im Werth von $cos.\,\mathrm{c}$ vermeiden, so setze man nur $90^0 - \varphi$ statt ψ, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} cotang.\,\varphi = cos.\,\gamma\,.\,tang.\,\mathrm{b} \\ \text{und} \quad cos.\,\mathrm{c} = \frac{cos.\,\mathrm{b}}{sin.\,\varphi}\cdot sin.\,(\mathrm{a} - \varphi) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Durch diese Gleichungen ist der dritte Winkel bestimmt. Gehen wir nun zur Aufsuchung einer Formel über, mit Hülfe deren die fehlenden Seiten berechnet werden können.

Wenden wir die Gleichung (20) auf das Polardreieck an, so hat man

$$tang.\, a' = \frac{tang.\, c'}{sin.\, (\beta' - \psi)}\, sin.\, \psi$$

und

$$tang.\, \psi = cos.\, c' \,.\, tang.\, \alpha',$$

indem man in denselben b mit c und γ mit β vertauscht und dann kommatisirt. Vertauscht man nun in diesen Gleichungen, wie man es wegen der Eigenschaften des Polardreiecks thun kann, *tang.* a' mit — *tang.* α, *tang.* c' mit — *tang.* γ, β mit 180° — b, *cos.* c' mit — *cos.* c, so kommt

$$- tang.\, \alpha = - \frac{tang.\, \gamma}{sin.\, (180^0 - b - \psi)}\, sin.\, \psi$$

oder

$$\left.\begin{aligned} tang.\, \alpha &= \frac{tang.\, \gamma}{sin.\, (b + \psi)}\, sin.\, \psi \\ \text{und}\quad tang.\, \psi &= cos.\, \gamma \,.\, tang.\, a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Diesen Formeln analog hat man zur Bestimmung der Seite β

$$\left.\begin{aligned} tang.\, \psi &= cos.\, \gamma \,.\, tang.\, b \\ tang.\, \beta &= \frac{tang.\, \gamma}{sin.\, (a + \psi)} \,.\, sin.\, \psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Fünfter Fall. Gegeben zwei Seiten (β und γ) und der der einen gegenüberstehende Winkel (b). Hier kann gefragt werden 1. nach dem der anderen Seite gegenüberliegenden Winkel c, 2. nach der dritten Seite α, und 3. nach dem eingeschlossenen Winkel a. Um die erste Frage zu beantworten, hat man die Gleichung

$$sin.\, \beta : sin.\, \gamma = sin.\, b : sin.\, c,$$

woraus folgt

$$sin.\, c = \frac{sin.\, \gamma}{sin.\, \beta}\, sin.\, b.$$

Zur Berechnung der Seite α kann man unmittelbar die Gleichungen (16) und (17) anwenden. Gleichung (17) giebt

$$cos.\, (\alpha - \varrho) = \frac{cos.\, \beta\; cos.\, \varrho}{cos.\, \gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Der Hülfswinkel ϱ ist aber durch die Gleichung

$$tang.\, \varrho = cos.\, b \,.\, tang.\, \gamma$$

gegeben. Hat man aber ϱ und $\alpha - \varrho$ berechnet, so findet man auch leicht α selbst.

Um den eingeschlossenen Winkel a zu berechnen, nehmen wir die Gleichungen (23)

$$tang.\,\psi = tang.\,\mathrm{b}\ cos.\,\gamma$$

$$sin.\,(\mathrm{a} + \varrho) = \frac{tang.\,\gamma}{tang.\,\beta}\ sin.\,\psi.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt ψ, die zweite $\mathrm{a} + \psi$, wonach man leicht a selbst finden kann.

Sechster Fall. Gegeben zwei Winkel (b und c) und die dem einen gegenüberstehende Seite (γ). Auch hier sind drei Aufgaben zu lösen: 1. ist zu suchen die dem zweiten gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite β, 2. die eingeschlossene Seite α, 3. der dritte Winkel a. Die Seite β findet man durch die Gleichung

$$sin.\,\mathrm{c} : sin.\,\mathrm{b} = sin.\,\gamma : sin.\,\beta,$$

woraus folgt

$$sin.\,\beta = \frac{sin.\,\mathrm{b}}{sin.\,\mathrm{c}}\ sin.\,\gamma.$$

Die eingeschlossene Seite α findet man ohne Weiteres durch die Formeln (18) und (19). Gleichung (18) giebt

$$tang.\,\varrho = cos.\,\mathrm{b}\,.\,tang.\,\gamma;$$

ist ϱ auf diese Weise gefunden, so findet man $\alpha - \varrho$, also auch α selbst durch Gleichung (19), denn sie giebt

$$sin.\,(\alpha - \varrho) = \frac{tang.\,\mathrm{b}}{tang.\,\mathrm{c}}\ sin.\,\varrho.$$

Den dritten Winkel a findet man durch die Gleichungen (21); die erste giebt

$$cotang.\,\varphi = cos.\,\gamma\ tang.\,\mathrm{b},$$

und wenn φ bekannt ist, so giebt die folgende $\mathrm{a} - \varphi$, also a selbst, denn nach ihr ist

$$sin.\,(\mathrm{a} - \varphi) = \frac{cos.\,\mathrm{c}}{cos.\,\mathrm{b}}\,.\,sin.\,\varphi.$$

28 **Zusammenstellung der Formeln.** Zur bequemeren Uebersicht mag hier noch eine Zusammenstellung der oben entwickelten, zur Berechnung der fehlenden Stücke sphärischer Dreiecke dienenden Formeln folgen.

Erster Fall. Gegeben α, β, γ.

$$cos.\,\mathrm{a} = \frac{cos.\,\alpha - cos.\,\beta\,.\,cos.\,\gamma}{sin.\,\beta\,.\,sin.\,\gamma}$$

$$\cos. b = \frac{\cos.\beta - \cos.\alpha . \cos.\gamma}{\sin.\alpha . \sin.\gamma}$$

$$\cos. c = \frac{\cos.\gamma - \cos.\alpha . \cos.\beta}{\sin.\alpha . \sin.\beta},$$

oder für logarithmische Rechnung umgewandelt:

$$(\sin. {}^1\!/_2\, a)^2 = \frac{\sin. {}^1\!/_2\, (\alpha + \beta - \gamma) \sin. {}^1\!/_2\, (\alpha + \gamma - \beta)}{\sin.\beta . \sin.\gamma}$$

$$(\sin. {}^1\!/_2\, b)^2 = \frac{\sin. {}^1\!/_2\, (\beta + \alpha - \gamma) \sin. {}^1\!/_2\, (\beta + \gamma - \alpha)}{\sin.\alpha . \sin.\gamma}$$

$$(\sin. {}^1\!/_2\, c)^2 = \frac{\sin. {}^1\!/_2\, (\gamma + \alpha - \beta) \sin. {}^1\!/_2\, (\gamma + \beta - \alpha)}{\sin.\alpha . \sin.\beta}.$$

Zweiter Fall. Gegeben a, b, c.

$$\cos.\beta = \frac{\cos. b + \cos. a . \cos. c}{\sin. a . \sin. c}$$

oder

$$(\sin. {}^1\!/_2\, \beta)^2 = \frac{\cos. {}^1\!/_2\, (a + b + c) \cos. {}^1\!/_2\, (a + c - b)}{\sin. a . \sin. c}.$$

Diesem analog sind die Werthe von $\cos.\alpha$, $(\sin. {}^1\!/_2\, \alpha)^2$, $\cos.\gamma$ und $(\sin. {}^1\!/_2\, \gamma)^2$.

Dritter Fall. Gegeben α, γ und b.

$$\cos.\beta = \cos.\alpha . \cos.\gamma - \sin.\alpha . \sin.\gamma \cos. b$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \cos.\beta &= \frac{\cos.\gamma}{\cos.\varrho} \cos. (\alpha - \varrho) \\ \tan g.\varrho &= \cos. b . \tan g.\gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \tan g. c &= \frac{\tan g. b}{\sin. (\alpha - \varrho)} . \sin.\varrho \\ \tan g.\varrho &= \tan g.\gamma \cos. b \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \tan g. a &= \frac{\tan g. b}{\sin. (\gamma - \varrho)} \sin.\varrho \\ \tan g.\varrho &= \tan g.\alpha . \cos. b \end{aligned}\right\}$$

Vierter Fall. Gegeben a, b und γ.

$$\left.\begin{aligned} \cos. c &= \frac{\cos. b}{\sin.\varphi} \sin. (a - \varphi) \\ \cot ang.\varphi &= \tan g. b \cos.\gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \tan g.\alpha &= \frac{\tan g.\gamma}{\sin. (b + \psi)} \sin.\psi \\ \tan g.\psi &= \cos.\gamma . \tan g. a \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} tang.\,\beta &= \frac{tang.\,\gamma}{sin.\,(a + \psi)} \\ tang.\,\psi &= cos.\,\gamma\,.\,tang.\,b \end{aligned}\right\}$$

Fünfter Fall. Gegeben β, γ und b.

$$sin.\,c = \frac{sin.\,\gamma}{sin.\,\beta}\,.\,sin.\,b$$

$$\left.\begin{aligned} cos.\,(\alpha - \varrho) &= \frac{cos.\,\varrho\,.\,cos.\,\beta}{cos.\,\gamma} \\ tang.\,\varrho &= cos.\,b\ tang.\,\gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} sin.\,(a + \psi) &= \frac{tang.\,\gamma}{tang.\,\beta}\ sin.\,\psi \\ tang.\,\psi &= tang.\,b\ \ cos.\,\gamma \end{aligned}\right\}$$

Sechster Fall. Gegeben b, c und γ.

$$sin.\,\beta = \frac{sin.\,b}{sin.\,c}\ sin.\,\gamma$$

$$\left.\begin{aligned} sin.\,(\alpha - \varrho) &= \frac{tang.\,b}{tang.\,c}\ sin.\,\varrho \\ tang.\,\varrho &= cos.\,b\,.\,tang.\,\gamma \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} sin.\,(\alpha - \varphi) &= \frac{cos.\,c}{cos.\,b}\,.\,sin.\,\varphi \\ cotang.\,\varphi &= cos.\,\gamma\,.\,tang.\,b \end{aligned}\right\}$$

Anhang.

Tafel

der

trigonometrischen Funktionen

des

ersten Quadranten

von

zehn zu zehn Minuten.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
0	0	0,000000	1,000000	0,000000	infinit	0	90
	10	0,002909	0,999996	0,002909	343,77371	50	
	20	0,005818	0,999983	0,005818	171,88540	40	
	30	0,008727	0,999962	0,008727	114,58865	30	
	40	0,011635	0,999932	0,011636	85,939791	20	
	50	0,014544	0,999894	0,014545	68,750087	10	
1	0	0,017452	0,999848	0,017455	57,289962	0	89
	10	0,020361	0,999793	0,020365	49,103881	50	
	20	0,023269	0,999729	0,023275	42,964077	40	
	30	0,026177	0,999657	0,026186	38,188459	30	
	40	0,029085	0,999577	0,029097	34,367771	20	
	50	0,031992	0,999488	0,032009	31,241577	10	
2	0	0,034900	0,999391	0,034921	28,636253	0	88
	10	0,037807	0 999285	0,037834	26,431600	50	
	20	0,040713	0,999171	0,040747	24,541758	40	
	30	0,043620	0,999048	0,043661	22,903766	30	
	40	0,046525	0,998917	0,046576	21,470401	20	
	50	0,049431	0,998778	0,049491	20,205553	10	
3	0	0,052336	0,998630	0,052408	19,081137	0	87
	10	0,055241	0,998473	0,055325	18,074977	50	
	20	0,058145	0,998308	0,058243	17,169337	40	
	30	0,061049	0,998135	0,061163	16,349855	30	
	40	0,063952	0,997953	0,064083	15,604784	20	
	50	0,066854	0,997763	0,067004	14,924417	10	
4	0	0,069757	0,997564	0,069927	14,300666	0	86
	10	0,072658	0,997357	0,072851	13,726738	50	
	20	0,075559	0,997141	0,075776	13,196883	40	
	30	0,078460	0,996917	0,078702	12,706205	30	
	40	0,081359	0,996685	0,081630	12,250505	20	
	50	0,084258	0,996444	0,084558	11,826167	10	
5	0	0,087156	0,996195	0,087489	11,430052	0	85
	10	0,090053	0,995937	0,090421	11,059431	50	
	20	0,092950	0,995671	0,093354	10,711913	40	
	30	0,095846	0,995396	0,096290	10,385397	30	
	40	0,098741	0,995113	0,099226	10,078031	20	
	50	0,101635	0,994822	0,102164	9,788173	10	
6	0	0,104529	0,994522	0,105104	9,514365	0	84
	10	0,107421	0,994214	0,108046	9,255304	50	
	20	0,110313	0,993897	0,110990	9,009826	40	
	30	0,113203	0,993572	0,113936	8,776887	30	
	40	0,116093	0,993238	0,116883	8,555547	20	
	50	0,118982	0,992897	0,119833	8,344956	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
7	0	0,121869	0,992546	0,122785	8,144346	0	83
	10	0,124756	0,992187	0,125738	7,953022	50	
	20	0,127642	0,991820	0,128694	7,770351	40	
	30	0,130526	0,991445	0,131653	7,595754	30	
	40	0,133410	0,991061	0,134613	7,428700	20	
	50	0,136292	0,990669	0,137576	7,268726	10	
8	0	0,139173	0,990268	0,140541	7,115370	0	82
	10	0,142053	0,989860	0,143508	6,968234	50	
	20	0,144932	0,989442	0,146478	6,826944	40	
	30	0,147809	0,989016	0,149451	6,691156	30	
	40	0,150686	0,988582	0,152426	6,560554	20	
	50	0,153561	0,988139	0,155404	6,434843	10	
9	0	0,156435	0,987688	0,158384	6,313752	0	81
	10	0,159307	0,987230	0,161368	6,197028	50	
	20	0,162178	0,986762	0,164354	6,084438	40	
	30	0,165048	0,986286	0,167343	5,975764	30	
	40	0,167916	0,985801	0,170334	5,870804	20	
	50	0,170783	0,985309	0,173330	5,769369	10	
10	0	0,173648	0,984808	0,176327	5,671282	0	80
	10	0,176512	0,984299	0,179328	5,576379	50	
	20	0,179375	0,983781	0,182332	5,484505	40	
	30	0,182236	0,983255	0,185340	5,395517	30	
	40	0,185095	0,982721	0,188350	5,309280	20	
	50	0,187953	0,982178	0,191363	5,225665	10	
11	0	0,190809	0,981627	0,194380	5,144554	0	79
	10	0,193664	0,981068	0,197401	5,065835	50	
	20	0,196517	0,980501	0,200425	4,989403	40	
	30	0,199368	0,979925	0,203452	4,915157	30	
	40	0,202218	0,979341	0,206483	4,843005	20	
	50	0,205066	0,978748	0,209518	4,772857	10	
12	0	0,207912	0,978148	0,212557	4,704630	0	78
	10	0,210756	0,977539	0,215599	4,638246	50	
	20	0,213599	0,976922	0,218645	4,573629	40	
	30	0,216440	0,976296	0,221695	4,510709	30	
	40	0,219279	0,975662	0,224749	4,449418	20	
	50	0,222116	0,975020	0,227806	4,389694	10	
13	0	0,224951	0,974370	0,230868	4,331476	0	77
	10	0,227784	0,973712	0,233934	4,274707	50	
	20	0,230616	0,973045	0,237004	4,219332	40	
	30	0,233445	0,972370	0,240079	4,165300	30	
	40	0,236273	0,971687	0,243158	4,112561	20	
	50	0,239098	0,970995	0,246241	4,061070	10	
G.	M	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
14	0	0,241922	0,970296	0,249328	4,010781	0	76
	10	0,244743	0,969588	0,252420	3,961652	50	
	20	0,247563	0,968872	0,255517	3,913642	40	
	30	0,250380	0,968148	0,258618	3,866713	30	
	40	0,253195	0,967415	0,261723	3,820828	20	
	50	0,256008	0,966675	0,264834	3,775952	10	
15	0	0,258819	0,965926	0,267949	3,732051	0	75
	10	0,261628	0,965169	0,271069	3,689093	50	
	20	0,264434	0,964404	0,274195	3,647047	40	
	30	0,267238	0,963631	0,277325	3,605884	30	
	40	0,270040	0,962849	0,280460	3,565575	20	
	50	0,272840	0,962059	0,283600	3,526094	10	
16	0	0,275637	0,961262	0,286745	3,487414	0	74
	10	0,278432	0,960456	0,289896	3,449512	50	
	20	0,281225	0,959642	0,293052	3,412363	40	
	30	0,284015	0,958820	0,296214	3,375943	30	
	40	0,286803	0,957990	0,299380	3,340233	20	
	50	0,289589	0,957151	0,302553	3,305209	10	
17	0	0,292372	0,956305	0,305731	3,270853	0	73
	10	0,295152	0,955450	0,308914	3,237144	50	
	20	0,297930	0,954588	0,312104	3,204064	40	
	30	0,300706	0,953717	0,315299	3,171595	30	
	40	0,303479	0,952838	0,318500	3,139719	20	
	50	0,306249	0,951951	0,321707	3,108421	10	
18	0	0,309017	0,951057	0,324920	3,077684	0	72
	10	0,311782	0,950154	0,328139	3,047492	50	
	20	0,314545	0,949243	0,331364	3,017830	40	
	30	0,317305	0,948324	0,334595	2,988685	30	
	40	0,320062	0,947397	0,337833	2,960042	20	
	50	0,322816	0,946462	0,341077	2,931889	10	
19	0	0,325568	0,945519	0,344328	2,904211	0	71
	10	0,328317	0,944568	0,347585	2,876997	50	
	20	0,331063	0,943609	0,350848	2,850235	40	
	30	0,333807	0,942642	0,354119	2,823913	30	
	40	0,336548	0,941667	0,357396	2,798020	20	
	50	0,339285	0,940684	0,360680	2,772545	10	
20	0	0,342020	0,939693	0,363970	2,747477	0	70
	10	0,344752	0,938694	0,367268	2,722808	50	
	20	0,347481	0,937687	0,370573	2,698525	40	
	30	0,350207	0,936672	0,373885	2,674622	30	
	40	0,352931	0,935650	0,377204	2,651087	20	
	50	0,355651	0,934619	0,380530	2,627912	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
21	0	0,358368	0,933580	0,383864	2,605089	0	**69**
	10	0,361082	0,932534	0,387205	2,582609	50	
	20	0,363793	0,931480	0,390554	2,560465	40	
	30	0,366501	0,930418	0,393911	2,538648	30	
	40	0,369206	0,929348	0,397275	2,517151	20	
	50	0,371908	0,928270	0,400647	2,495966	10	
22	0	0,374607	0,927184	0,404026	2,475087	0	**68**
	10	0,377302	0,926090	0,407414	2,454506	50	
	20	0,379994	0,924989	0,410810	2,434217	40	
	30	0,382683	0,923880	0,414214	2,414214	30	
	40	0,385369	0,922762	0,417626	2,394489	20	
	50	0,388052	0,921638	0,421046	2,375037	10	
23	0	0,390731	0,920505	0,424475	2,355852	0	**67**
	10	0,393407	0,919364	0,427912	2,336929	50	
	20	0,396080	0,918216	0,431358	2,318261	40	
	30	0,398749	0,917060	0,434812	2,299843	30	
	40	0,401415	0,915896	0,438276	2,281669	20	
	50	0,404078	0,914725	0,441748	2,263736	10	
24	0	0,406737	0,913545	0,445229	2,246037	0	**66**
	10	0,409392	0,912358	0,448719	2,228568	50	
	20	0,412045	0,911164	0,452218	2,211323	40	
	30	0,414693	0,909961	0,455726	2,194300	30	
	40	0,417339	0,908751	0,459244	2,177492	20	
	50	0,419980	0,907533	0,462771	2,160896	10	
25	0	0,422618	0,906308	0,466308	2,144507	0	**65**
	10	0,425253	0,905075	0,469854	2,128321	50	
	20	0,427884	0,903834	0,473410	2,112335	40	
	30	0,430511	0,902585	0,476976	2,096544	30	
	40	0,433135	0,901329	0,480551	2,080944	20	
	50	0,435755	0,900065	0,484137	2,065532	10	
26	0	0,438371	0,898794	0,487733	2,050304	0	**64**
	10	0,440984	0,897515	0,491339	2,035257	50	
	20	0,443593	0,896229	0,494955	2,020386	40	
	30	0,446198	0,894934	0,498582	2,005690	30	
	40	0,448799	0,893633	0,502219	1,991164	20	
	50	0,451397	0,892323	0,505867	1,976805	10	
27	0	0,453991	0,891007	0,509525	1,962611	0	**63**
	10	0,456580	0,889682	0,513195	1,948577	50	
	20	0,459167	0,888350	0,516876	1,934702	40	
	30	0,461749	0,887011	0,520567	1,920982	30	
	40	0,464327	0,885664	0,524270	1,907415	20	
	50	0,466901	0,884310	0,527984	1,893997	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
28	0	0,469472	0,882948	0,531709	1,880727	0	62
	10	0,472038	0,881578	0,535447	1,867600	50	
	20	0,474600	0,880201	0,539195	1,854616	40	
	30	0,477159	0,878817	0,542956	1,841771	30	
	40	0,479713	0,877425	0,546728	1,829063	20	
	50	0,482263	0,876026	0,550513	1,816489	10	
29	0	0,484810	0,874620	0,554310	1,804048	0	61
	10	0,487352	0,873206	0,558118	1,791736	50	
	20	0,489890	0,871784	0,561939	1,779552	40	
	30	0,492424	0,870356	0,565773	1,767494	30	
	40	0,494953	0,868920	0,569619	1,755559	20	
	50	0,497479	0,867476	0,573478	1,743745	10	
30	0	0,500000	0,866025	0,577350	1,732051	0	60
	10	0,502517	0,864567	0,581235	1,720474	50	
	20	0,505030	0,863102	0,585134	1,709012	40	
	30	0,507538	0,861629	0,589045	1,697663	30	
	40	0,510043	0,860149	0,592970	1,686426	20	
	50	0,512543	0,858662	0,596908	1,675299	10	
31	0	0,515038	0,857167	0,600861	1,664280	0	59
	10	0,517529	0,855666	0,604827	1,653366	50	
	20	0,520016	0,854156	0,608807	1.642558	40	
	30	0,522499	0,852640	0,612801	1,631852	30	
	40	0,524977	0,851117	0,616810	1,621247	20	
	50	0,527450	0,849586	0,620832	1,610742	10	
32	0	0,529919	0,848048	0,624869	1,600335	0	58
	10	0,532384	0,846503	0,628921	1,590024	50	
	20	0,534844	0,844951	0,632988	1,579808	40	
	30	0,537300	0,843391	0,637070	1,569686	30	
	40	0,539751	0,841825	0,641167	1,559655	20	
	50	0,542197	0,840251	0,645280	1,549716	10	
33	0	0,544639	0,838671	0,649408	1,539865	0	57
	10	0,547076	0,837083	0,653551	1,530102	50	
	20	0,549509	0,835488	0,657710	1,520426	40	
	30	0,551937	0,833886	0,661886	1,510835	30	
	40	0,554360	0,832277	0,666077	1,501328	20	
	50	0,556779	0,830661	0,670285	1,491904	10	
34	0	0,559193	0,829038	0,674509	1,482561	0	56
	10	0,561602	0,827407	0,678749	1,473298	50	
	20	0,564007	0.825770	0,683007	1,464115	40	
	30	0,566406	0,824126	0,687281	1,455009	30	
	40	0,568801	0,822475	0,691573	1,445980	20	
	50	0,571191	0,820817	0,695881	1,437027	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
35	0	0,573576	0,819152	0,700208	1,428148	0	55
	10	0,575957	0,817480	0,704552	1,419343	50	
	20	0,578332	0,815801	0,708913	1,410610	40	
	30	0,580703	0,814116	0,713293	1,401948	30	
	40	0,583069	0,812423	0,717691	1,393357	20	
	50	0,585429	0,810723	0,722108	1,384835	10	
36	0	0,587785	0,809017	0,726543	1,376382	0	54
	10	0,590136	0,807304	0,730996	1,367996	50	
	20	0,592482	0,805584	0,735469	1,359676	40	
	30	0,594823	0,803857	0,739961	1,351422	30	
	40	0,597159	0,802123	0,744472	1,343233	20	
	50	0,599489	0,800383	0,749003	1,335108	10	
37	0	0,601815	0,798636	0,753554	1,327045	0	53
	10	0,604136	0,796882	0,758125	1,319044	50	
	20	0,606451	0,795121	0,762716	1,311105	40	
	30	0,608761	0,793353	0,767327	1,303225	30	
	40	0,611067	0,791580	0,771959	1,295406	20	
	50	0,613367	0,789798	0,776612	1,287645	10	
38	0	0,615662	0,788011	0,781286	1,279942	0	52
	10	0,617951	0,786217	0,785981	1,272296	50	
	20	0,620236	0,784416	0,790698	1,264706	40	
	30	0,622515	0,782608	0,795436	1,257172	30	
	40	0,624789	0,780794	0,800196	1,249693	20	
	50	0,627057	0,778973	0,804979	1,242269	10	
39	0	0,629320	0,777146	0,809784	1,234897	0	51
	10	0,631578	0,775312	0,814612	1,227579	50	
	20	0,633831	0,773472	0,819463	1,220312	40	
	30	0,636078	0,771625	0,824336	1,213097	30	
	40	0,638320	0,769771	0,829234	1,205933	20	
	50	0,640557	0,767911	0,834155	1,198818	10	
40	0	0,642788	0,766044	0,839100	1,191754	0	50
	10	0,645013	0,764171	0,844069	1,184738	50	
	20	0,647233	0,762292	0,849062	1,177770	40	
	30	0,649448	0,760406	0,854081	1,170850	30	
	40	0,651657	0,758514	0,859124	1,163976	20	
	50	0,653861	0,756615	0,864193	1,157150	10	
41	0	0,656059	0,754710	0,869287	1,150368	0	49
	10	0,658252	0,752798	0,874407	1,143633	50	
	20	0,660439	0,750880	0,879553	1,136941	40	
	30	0,662620	0,748956	0,884725	1,130294	30	
	40	0,664796	0,747025	0,889924	1,123691	20	
	50	0,666966	0,745088	0,895151	1,117131	10	
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

G.	M.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	M.	G.
42	0	0,669131	0,743145	0,900404	1,110612	0	48
	10	0,671290	0,741195	0,905685	1,104137	50	
	20	0,673443	0,739240	0,910994	1,097702	40	
	30	0,675590	0,737277	0,916331	1,091309	30	
	40	0,677732	0,735310	0,921697	1,084955	20	
	50	0,679868	0,733335	0,927091	1,078642	10	
43	0	0,681998	0,731354	0,932515	1,072369	0	47
	10	0,684123	0,729367	0,937968	1,066134	50	
	20	0,686242	0,727374	0,943451	1,059938	40	
	30	0,688355	0,725374	0,948965	1,053780	30	
	40	0,690462	0,723369	0,954508	1,047660	20	
	50	0,692563	0,721357	0,960083	1,041577	10	
44	0	0,694658	0,719340	0,965689	1,035530	0	46
	10	0,696748	0,717316	0,971326	1,029520	50	
	20	0,698832	0,715286	0,976996	1,023546	40	
	30	0,700909	0,713250	0,982697	1,017607	30	
	40	0,702981	0,711209	0,988432	1,011704	20	
	50	0,705047	0,709161	0,994199	1,005835	10	
45	0	0,707107	0,707107	1,000000	1,000000	0	45
G.	M.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	M.	G.

Berichtigung.

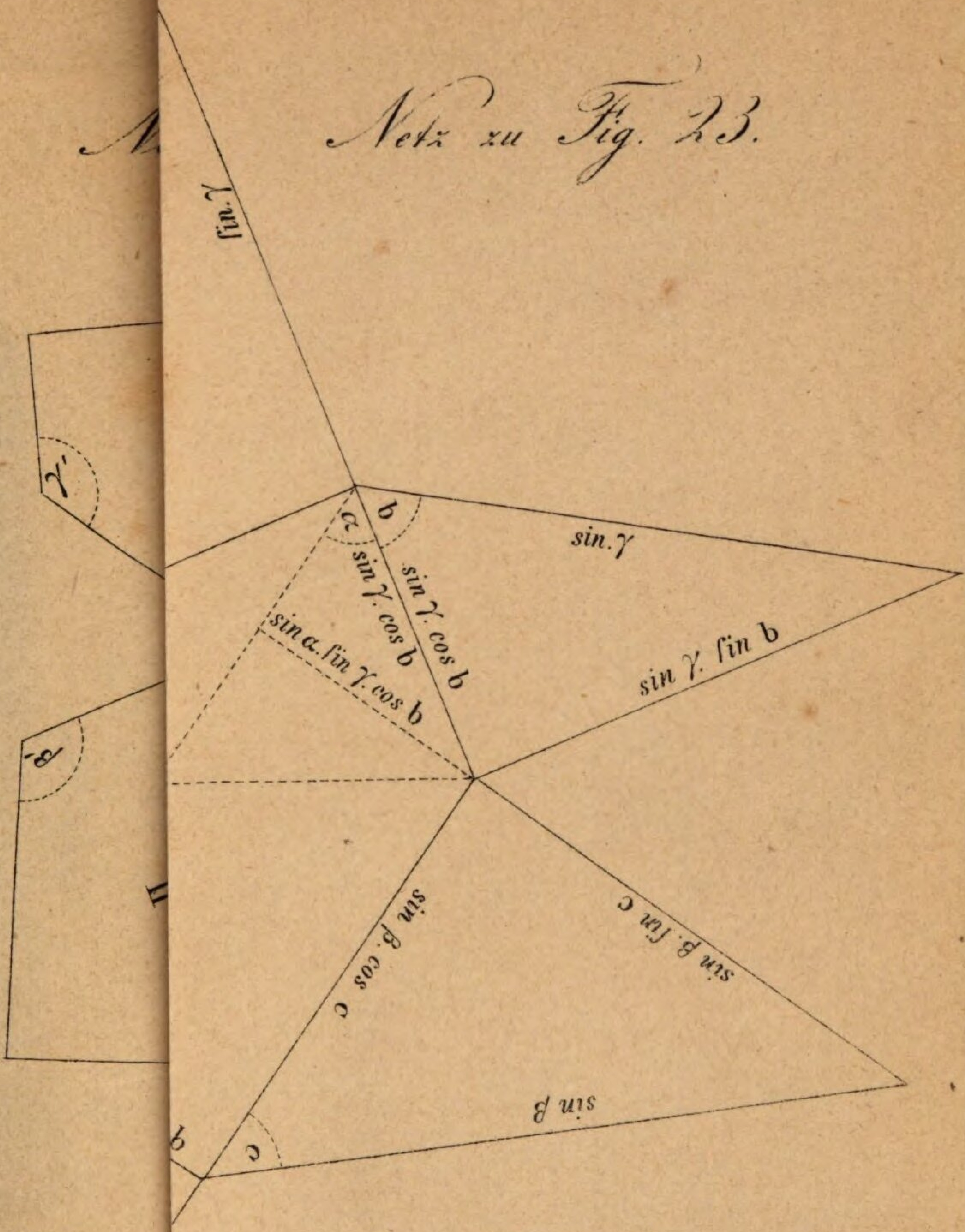
Die vorletzte Formel der Seite 68 muß statt:

$$sin.\,(\alpha - \varphi) = \frac{cos.\ c}{cos.\ b} \cdot sin.\,\varphi$$

heißen:

$$sin.\,(a - \varphi) = \frac{cos.\ c}{cos.\ b} \cdot sin.\,\varphi.$$

Netz zu Fig. 23.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Müller, Johann Heinrich Jacob, 1809-1875

Anfangsgründe der geometrischen Disciplinen für Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen, sowie auch zum Selbstunterricht ; in drei Theilen

Bd.: 2

Braunschweig 1859

41.1274-1/3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10702896-9